

Simulation des Untergrundes durch
inkohärente Paarerzeugung in
Linearbeschleunigern.

Diplomarbeit
von
Daniel Schulte

II. Institut für Experimentalphysik
der Universität Hamburg

Hamburg, März 1993

Danksagung

Ich möchte Herrn Schmüser und Herrn Leenen für ihre Betreuung meiner Arbeit danken, außerdem Herrn Hänßgen und Herrn Chen, die mir die Programme MACPAR und ABEL zur Verfügung stellten, sowie Herrn Brinkmann und Herrn Napoly, die mir einen Vergleich mit ihren Simulationsergebnissen ermöglichten. Herr Gall hat mir bei den Problemen, die sich bei der Arbeit am Rechner ergaben, sehr geholfen. Außerdem möchte ich Herrn Brück und Herrn Clausen stellvertretend für viele andere dafür danken, daß sie meinen hohen Rechenzeitverbrauch nicht nur geduldet sondern auch gefördert haben.

Daniel Schulte

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Pincheffekt und Photonenproduktion	5
2.1	Disruption	5
2.2	Ein Teilchen im Feld eines Strahls	6
2.3	Der fokussierende Fall	8
2.4	Berechnung der Luminositätszunahme	11
2.5	Defokussierung durch einen gleichgeladenen Strahl	11
2.6	Beamstrahlung und Bremsstrahlung	13
3	Aufstellen und Lösen der Bewegungsgleichungen	15
3.1	Verwenden eines Gitters	15
3.2	Berechnung der Potentiale mit der Greensfunktion	16
3.3	Anwenden der Fouriertransformation	17
3.4	Lösung mit Hilfe der Poissongleichung	18
3.5	Integration der Bewegungsgleichungen und Berechnung der Beamstrahlung	20
4	Simulationsprogramme	22
4.1	Das Programm MACPAR	22
4.2	Änderungen an MACPAR	24
4.3	Das Programm ABEL	25
4.4	Vergleich der beiden Programme	25
5	Paarproduktion	26
5.1	Die kohärente Paarerzeugung	26
5.2	Inkohärente Paarerzeugung	27
5.3	Methode der äquivalenten Photonen	29
5.4	Der Breit-Wheeler-Prozeß	30
5.5	Berechnung der Wirkungsquerschnitte	31
5.6	Winkelverteilung der Teilchen aus der Paarerzeugung	34
5.7	Geometrische Reduktion	37
6	Simulation der Paarerzeugung	40
6.1	Adaptive Monte-Carlo-Integration	40
6.2	Zufallszahlen	41
6.3	Aufstellen der Bewegungsgleichungen	43
6.4	Integration der Bewegungsgleichungen	44

7	Aufbau von TRACKIT	45
7.1	Überblick	45
7.2	Parameter	46
7.3	Paarerzeugung	47
7.4	Die Funktionen zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte	49
7.5	Die Photonenspektren	52
7.6	Verfolgung der Teilchen durch den Strahl	52
7.7	MOVEP und MOVEPI	53
8	Ergebnisse der Simulation	56
8.1	Die Luminositätserhöhung und das Beamstrahlungsspektrum	56
8.2	Der Energieverlust durch Beamstrahlung	58
8.3	Der maximale Ablenkwinkel der erzeugten Teilchen	59
8.4	Die Winkelverteilung der erzeugten Teilchen	63
8.5	Die Teilchenbahn im Detektor	67
8.6	Treffer auf der Detektorwand	68
8.7	Seitliche Abweichungen	77
8.8	Ausblick	78
A	Parameter für MACPAR und TRACKIT	82
A.1	Die Eingabedatei für MACPAR	82
A.2	Die Parameter für TRACKIT	83

1 Einleitung

In der Elementarteilchenphysik hat sich das Standardmodell bei der Erklärung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung bisher außerordentlich bewährt. Es gibt keine experimentellen Ergebnisse, die zu ihm in Widerspruch stünden. Die elektromagnetische Wechselwirkung kann im Rahmen einer eichinvarianten Theorie erklärt werden, da die Photonen masselos sind. Die Bosonen der schwachen Wechselwirkung besitzen hingegen eine sehr große Masse. Es ist bisher nur eine Möglichkeit bekannt, dennoch eine eichinvariante Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung aufstellen zu können. Man muß ein weiteres Feld postulieren, das sogenannte Higgs-Feld [25] [10]. Die Masse der Bosonen der schwachen Wechselwirkung läßt sich nun durch die Kopplung an das Higgs-Feld im Rahmen einer einheitlichen Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung eichinvariant erklären. Verschiedene Theorien erfordern unterschiedlich viele Higgs-Bosonen, die Trägerteilchen des Higgs-Feldes. Bisher ist es nicht gelungen eines dieser Bosonen nachzuweisen, ihre Masse muß nach Messungen bei LEP mindestens 57 GeV betragen [8]. Es gibt theoretische Überlegungen, die eine Masse des leichtesten Higgs-Bosons von unter 300 GeV voraussagen. Zum Nachweis dieser Teilchen sind Elektron-Positron-Beschleuniger sehr gut geeignet.

Bisher wurden Experimente, die hohe Energien erfordern, gewöhnlich in Speicherringen gemacht. Diese bieten eine Reihe von Vorteilen, insbesondere läßt sich ein Strahl mehrfach für ein Experiment verwenden, außerdem ist die Beschleunigungsstrecke nahezu beliebig lang, da sie sich über sehr viele Umläufe erstreckt.

Dadurch, daß die Teilchen auf eine Kreisbahn gezwungen werden, wird allerdings Synchrotronstrahlung frei. Eine Herleitung dafür ist zum Beispiel in [24] zu finden. Für die Höhe der Verlustleistung gilt

$$p = \frac{e^2 c \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 \rho^2},$$

wobei $\gamma = \frac{E}{mc^2}$ gilt und ρ der Radius des Beschleunigers ist. Für vergleichsweise schwere Teilchen wie Protonen ergibt sich daraus keine sehr starke Einschränkung, ein Elektronenspeicherring mit einem extrem großen Radius von 100km und einer Energie von 500GeV, das heißt einem γ von 10^6 , hat einen großen Verlust je Teilchen und Umlauf von über 50GeV. Daher erscheint es notwendig, trotz aller Nachteile auf Linearbeschleuniger zurückzugreifen.

Bei diesen kann jeder Strahl jedoch nur einmal verwendet werden, und so ist zum Erlangen der notwendigen Luminosität¹ ein sehr kleiner Strahlquerschnitt notwendig.

¹Aus der Luminosität läßt sich die Rate R mit der in einem Beschleuniger ein Prozeß mit dem Wirkungsquerschnitt σ auftritt berechnen:

$$R = L\sigma.$$

	TESLA 1	TESLA 2	JLC-C
$E_b[\text{GeV}]$	250	250	250
$L_0[10^{29}\text{cm}^{-2}]$	3.26	1.57	10.2
$N_e[10^{10}]$	5.14	2.5	1.0
$\sigma_x[\text{nm}]$	639	495	260
$\sigma_y[\text{nm}]$	101	64	3
$\sigma_z[\mu\text{m}]$	1000	1000	80

Tabelle 1: Einige Parametersätze für mögliche zukünftige Linearbeschleuniger. Die Energie der Strahlteilchen ist durch E_b gegeben; N_e ist die Zahl der Teilchen je Bunch, deren Teilchendichte als normalverteilt mit den Ausdehnungen am Wechselwirkungspunkt σ_x , σ_y und σ_z angenommen wird. Die Bunche bewegen sich dabei in z -Richtung. Die Luminosität L_0 ist die ohne Pincheffekt, sie wird hier je Kreuzung zweier Bunche angegeben, nicht wie sonst üblich pro Sekunde.

Dadurch aber erhält ein durch Speicherringe bereits bekannter Effekt eine neue Bedeutung. Die einander im Wechselwirkungspunkt durchdringenden Teilchenpakete, auch Bunche genannt, bewirken eine Verkleinerung des Querschnitts des jeweils anderen. Dieser Effekt war bisher vergleichsweise gering, die Wirkung des einen Teilchenpaketes auf das andere ließ sich als die einer dünnen Linse verstehen. In den zukünftigen Linearbeschleunigern jedoch erhalten die Teilchen nicht nur einen kleinen zusätzlichen Transversalimpuls, sondern der Querschnitt des Bunches verringert sich noch während der Durchdringung merklich. Daher spricht man vom Pincheffekt. Dadurch daß die Teilchen auf gekrümmte Bahnen gezwungen werden, wird die sogenannte Beamstrahlung frei. Diese Beamstrahlung führt zum einen dazu, daß die Elektronen und Positronen nicht mehr mit voller Energie kollidieren, zum anderen können auch durch sie e^+e^- -Paare erzeugt werden, die die Messungen stören oder den Detektor belasten.

In dieser Arbeit wird der Untergrund, der durch die inkohärente Paarerzeugung in Linearbeschleunigern verursacht wird, näher untersucht. Die Werte in der Tabelle 1 sollen eine erste Vorstellung von den möglichen Parametern für Linearbeschleuniger geben. Die Teilchendichte in den Bunchen wird im allgemeinen als in jeder Richtung normalverteilt angenommen. Im den folgenden Abschnitten soll zuerst der Pincheffekt näher untersucht werden, und da sich eine analytische Lösung als schwierig erweisen wird, sollen zwei Programme ABEL und MACPAR vorgestellt werden, die den Effekt simulieren. Anschließend werden die Prozesse der Paarerzeugung vorgestellt, sowie das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Programm TRACKIT, das auf den Ergebnissen von MACPAR aufbauend den Untergrund simuliert.

2 Pincheffekt und Photonenproduktion

2.1 Disruption

In einem Beschleuniger üben die Teilchen eines Strahles bei höheren Energien praktisch keine Kräfte aufeinander aus. Die elektrische Abstoßung wird durch die magnetische Anziehung weitgehend aufgewogen. Anschaulich kann man sich dies klarmachen, indem man in das Ruhesystem der Teilchen übergeht. In diesem existieren nur elektrische und keine magnetischen Kräfte. Der Strahl verlängert sich um den Faktor γ und entsprechend nehmen die Längenladungsdichte und damit die aufeinander ausgeübten Kräfte ab. Durch die Zeitdilatation ist die Zeit im Ruhesystem außerdem um den Faktor $1/\gamma$ gegenüber dem Laborsystem verlangsamt.

Die im Wechselwirkungspunkt des Beschleunigers sich kreuzenden, unterschiedlich geladenen Strahlen jedoch üben Kräfte aufeinander aus. Hierbei addieren sich elektrische und magnetische Kraft, und die beiden Strahlen ziehen einander an. Treffen sich die Strahlen mittig, so werden die einzelnen Teilchen zur Achse hin beschleunigt, der entgegenkommende Strahl wirkt wie eine fokussierende Linse. Dieser Effekt ist auch von den Speicherringen wohlbekannt, hier ist er vor allem deshalb wichtig, da sich durch ihn der Q -Wert einer Maschine ändert. Die Strahlen in den zukünftigen Linearbeschleunigern werden sehr viel dichter sein als in Speicherringen. Daher wird die Fokussierung deutlich zunehmen. Anders als im Speicherring läßt sich der entgegenkommende Strahl dann nicht mehr als dünne Linse auffassen, die nur den Transversalimpuls ändert. Jeder Strahl zieht sich noch im Feld des anderen zusammen. Dies ist der sogenannte Pincheffekt. Durch die verringerten Strahlausdehnungen nimmt die Luminosität des Beschleunigers zu. Diese Zunahme wird durch den Luminositätsvergrößerungsfaktor Faktor H_D , (englisch *luminosity-enhancement-factor*) ausgedrückt:

$$H_D = \frac{L}{L_0}.$$

Dabei ist L_0 die Luminosität ohne Pincheffekt für einen Strahl mit in x - und y -Richtung normalverteilter Ladungsdichte:²

$$L_0 = \frac{N^2}{4\pi\sigma_x\sigma_y},$$

Allerdings hat der Pincheffekt auch unerwünschte Wirkungen. Da die Teilchen auf gekrümmte Bahnen gezwungen werden, emittieren sie die sogenannte Beamstrahlung. Die so entstandenen Photonen können mit anderen Photonen oder den Elektronen und Positronen durch Stoß Elektron-Positron-Paare erzeugen. Fliegen die neu erzeugten Teilchen nicht parallel zum Strahl, so können sie

²Hier und im weiteren wird angenommen, daß die Strahlen sich in z -Richtung bewegen. Die x -Achse zeigt in die Richtung der größeren Strahlausdehnung, falls es eine solche gibt.

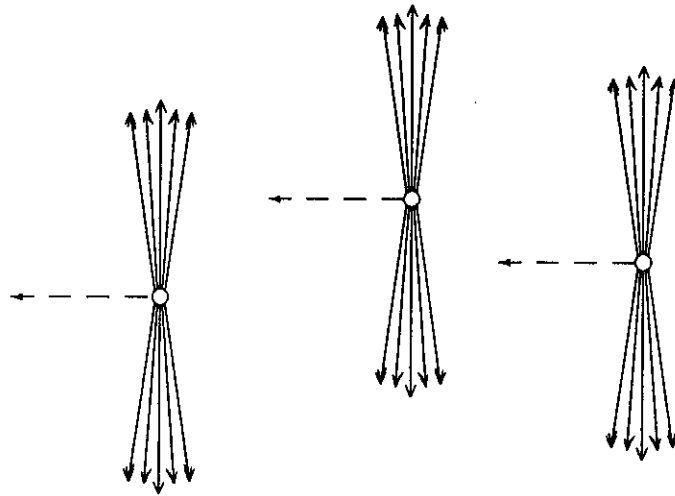


Abbildung 1: Die Felder ultrarelativistischer Positronen werden in Flugrichtung zusammengepreßt. Der Öffnungswinkel der Feldlinien beträgt rund $1/\gamma$.

möglicherweise die Messung stören. Der Energieverlust der Strahlteilchen bei der Emittierung der Beamstrahlung führt dazu, daß die Energie im Schwerpunktsystem eines Stoßes zweier Strahlteilchen nicht mehr konstant ist, sondern merklich variiert.

2.2 Ein Teilchen im Feld eines Strahls

Das elektrische und magnetische Feld eines ultrarelativistischen Teilchens sind nahezu transversal [15], siehe Abbildung 1. Der Öffnungswinkel ist dabei proportional zu $\frac{1}{\gamma}$. Um festzustellen, ob ein Strahl ein kontinuierliches Feld erzeugt, werden die Dichtefaktoren d für einen normalverteilten Strahl eingeführt:

$$d_x = \frac{N\sigma_x}{\gamma\sigma_z} \quad d_y = \frac{N\sigma_y}{\gamma\sigma_z}.$$

Diese Faktoren geben an, von wievielen Teilchen das von einem entgegenkommenden Teilchen wahrgenommene Feld erzeugt wird. Ist d groß, so ist es zulässig, von einem mittleren Feld zu sprechen. Ist d hingegen kleiner als 1, so hat das Feld deutliche Schwankungen. Für die y -Richtung ergeben sich für einige Beschleunigerparametersätze Werte $d_y \approx 1$. Das Feld hat also schon merkliche Schwankungen. Der mittlere Winkel, um den ein Teilchen im Feld eines anderen abgelenkt wird, ist sehr klein. Entsprechend ändern sich die transversalen Koordinaten auf dem Flug zum nächsten Teilchen nur wenig. Die Felder der einzelnen Teilchen können daher durch ein mittleres ersetzt werden.

Aus den Bahnen, die die Teilchen der beiden Strahlpakete während der Wechselwirkung durchlaufen, könnte man die Verteilung der Winkel, unter denen sie zur Strahlachse fliegen, die von ihnen abgegebene Strahlung sowie die tatsächliche Luminosität berechnen. Für möglicherweise erzeugte Sekundärteilchen aus der Paarerzeugung, die eine viel niedrigere Energie haben können, ist interessant, ob sie den Detektor treffen und gegebenenfalls an welchen Orten. Deshalb sollen die Bahnen unter vereinfachenden Annahmen hergeleitet werden.

Man kann das dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales zurückführen und zunächst nur eine Linienladung λ verwenden. Für die elektrische und magnetische Kraft gilt dann:

$$F_E = q \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

$$F_B = -q \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \beta_z \beta'.$$

$v' = \beta'c$ ist die Geschwindigkeit des Strahles und $v_z = \beta_z c$ die Longitudinalgeschwindigkeit des einzelnen Teilchens; r ist der Abstand des Teilchens von der Linienladung. Hier ist leicht zu sehen, daß die Gesamtkraft sehr gering ist, falls das Teilchen zum Strahl parallel fliegt, unabhängig davon, ob beide das gleiche Ladungsvorzeichen haben oder nicht.

Die Beschleunigung läßt sich nun leicht aus der 2. Newton-Gleichung herleiten:

$$\dot{p}_i = F_i.$$

Aus

$$p_i = \beta_i \gamma m c$$

folgt:

$$\dot{p}_i = \dot{\beta}_i \gamma m c + \beta_i \dot{\gamma} m c,$$

also

$$\dot{\beta}_i = \frac{1}{\gamma m c} [F_i - \beta_i \dot{\gamma} m c]. \quad (1)$$

Für ein einzelnes Teilchen der Geschwindigkeit $\vec{v} = (\beta_z, \beta_r)c$, das durch das Feld einer Linienladung λ fliegt, die sich ihrerseits mit der Geschwindigkeit β' längs der z -Achse bewegt, lauten die radiale und longitudinale Komponente der Lorentzkraft:

$$F_r = (1 - \beta' \beta_z) \frac{k}{r}$$

$$F_z = \beta' \beta_r \frac{k}{r},$$

mit $k = q\lambda/2\pi\epsilon_0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_r &= \frac{1}{\gamma mc} (F_r - \beta_r \dot{\gamma} mc) \\ &= \frac{1}{\gamma mc} \left((1 - \beta' \beta_z) \frac{k}{r} - \beta_r \dot{\gamma} mc \right) \\ \dot{\beta}_z &= \frac{1}{\gamma mc} \left(\beta' \beta_r \frac{k}{r} - \beta_z \dot{\gamma} mc \right).\end{aligned}$$

Es gilt $\dot{\gamma} = \beta_r \frac{k}{r mc}$. Die radiale Komponente der Bahngleichung des Teilchens $r(t)$ kann nach z aufgelöst werden: $r(t(z))$. Hieraus berechnet sich

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \frac{\beta_r}{\beta_z} \\ &= \frac{dt}{dz} \frac{d}{dt} \frac{\beta_r}{\beta_z} \\ &= \frac{1}{\beta_z} \frac{1}{\beta_z^2} (\dot{\beta}_r \beta_z - \beta_r \dot{\beta}_z) \\ &= \frac{k}{\beta_z^2 \gamma m c r} \left(1 - \beta' \beta_z - \beta' \frac{\beta_r^2}{\beta_z} \right).\end{aligned}\quad (2)$$

Da im folgenden β_r gewöhnlich sehr klein ist und $|\beta_z| \approx 1$ sowie $|\beta'| \approx 1$ sind, kann dann der dritte Term vernachlässigt werden. Dies entspricht der Vernachlässigung der Änderung der Energie des Teilchens in Gleichung (1). Der Term $(1 - \beta' \beta_z)$ hat den Wert 0, falls β' und β_z gleiche Vorzeichen haben, also Teilchen und Strahl sich in die gleiche Richtung bewegen. Sind die Vorzeichen entgegengesetzt, kann $(1 - \beta' \beta_z) \approx 2$ benutzt werden.

2.3 Der fokussierende Fall

Zur Vereinfachung soll zuerst die Bahn eines Teilchens in einem entgegenkommenden Strahl untersucht werden, der als zylindersymmetrisch angenommen wird. Die Ladungsvorzeichen von Strahl und Teilchen seien verschieden. Dies genügt, die wichtigsten Effekte deutlich zu machen, eine exakte Lösung für alle Teilchen eines Bunches ist nicht möglich. Die Sollenergie der Strahlteilchen beträgt γmc^2 , das betrachtete Einzelteilchen hat einen Bruchteil ϵ hiervon. Der Faktor ϵ wurde eingeführt, um die hier gemachten Betrachtungen auch auf die Sekundärteilchen ausdehnen zu können. Deren Energie liegt nur bei einem Bruchteil der Strahlenergie.

Läßt man das Teilchen durch den entgegenkommenden Strahl laufen, so gilt nach Gleichung (2):

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\epsilon \gamma m} \frac{2e}{2\pi \epsilon_0 r} \int_0^r \rho(r', z) 2\pi r' dr'. \quad (3)$$

Nimmt man für ρ eine Gaußverteilung in transversaler Richtung an

$$\rho(r, z) = f(z) \frac{-Ne}{2\pi\sigma_r^2} \exp \frac{-r^2}{2\sigma_r^2},$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dz^2} &= \frac{-Ne^2}{\epsilon\gamma mc^2 \pi \epsilon_0 r \sigma_r^2} \left[-\sigma_r^2 \exp \frac{-r'^2}{2\sigma_r^2} \right]_0^r f(z) \\ &= \frac{-Ne^2}{\epsilon\gamma mc^2 \pi \epsilon_0 r} \left[1 - \exp \frac{-r^2}{2\sigma_r^2} \right] f(z). \end{aligned}$$

Für Radien $r < \sigma$ kann man die Exponentialfunktion entwickeln

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{-Ne^2}{2\pi\epsilon_0\epsilon\gamma mc^2\sigma_r^2} r f(z). \quad (4)$$

Zur Abkürzung wird im folgenden der sogenannte klassische Elektronenradius $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$ benutzt. Die Differentialgleichung wird unter der vereinfachenden Annahme gelöst, daß $f(z) = 1/(2\sqrt{3}\sigma_z)$ konstant ist und daß $\left(\frac{dr}{dz}\right)_{t_0} = 0$ gilt. Dabei ist t_0 der Zeitpunkt, an dem die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Strahl beginnt, es hat dann die Koordinaten (x_0, y_0, z_0) . Aus Gleichung (4) folgt

$$r(z) = r_0 \cos \left(\sqrt{\frac{2Nr_e}{\epsilon\gamma\sigma_r^2 2\sqrt{3}\sigma_z}} (z - z_0) \right)$$

und

$$\frac{dr}{dz} = -r_0 \sqrt{\frac{2Nr_e}{\epsilon\gamma\sigma_r^2 2\sqrt{3}\sigma_z}} \sin \left(\sqrt{\frac{2Nr_e}{\epsilon\gamma\sigma_r^2 2\sqrt{3}\sigma_z}} (z - z_0) \right).$$

Also erhält man, für eine sehr schwache Fokussierung, am Ende des Strahles am Ort z_e

$$\frac{dr}{dz} = -r_0 \frac{2Nr_e}{\epsilon\gamma\sigma_r^2 2\sqrt{3}\sigma_z} (z_e - z_0) = -r_0 \frac{Nr_e}{\gamma\sigma_r^2};$$

wobei berücksichtigt wurde, daß die Relativgeschwindigkeit zwischen Teilchen und Strahl $2c$ ist, also $(z_e - z_0)/(2\sqrt{3}\sigma_z) = \frac{1}{2}$.

Entsprechend kann man für eine starke Fokussierung den Sinus durch 1 ersetzen, um eine Abschätzung der Geschwindigkeit zu erhalten:

$$\left| \frac{dr}{dz} \right| \approx r_0 \sqrt{\frac{2Nr_e}{\epsilon\gamma\sigma_r^2}} f_0.$$

Man kann den sogenannten Disruptionsparameter D durch folgende Gleichung einführen:

$$D = \frac{Nr_e\sigma_z}{\gamma\sigma_r^2},$$

Für die schwache Fokussierung folgt:

$$\left. \frac{dr}{dz} \right|_{z_e} = -r_0 \frac{D}{\epsilon} \frac{1}{\sigma_z}.$$

$\frac{\sigma_z\epsilon}{D}$ ist die Brennweite. Für die starke Fokussierung ist D/ϵ groß und hat keine so einfache Bedeutung mehr, da ein Teilchen mehrere Schwingungen ausführt.

Ist die Ladungsverteilung im Bunch nicht zylindersymmetrisch, sondern wird sie durch das Produkt zweier gaußscher Ladungsverteilungen beschrieben

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}},$$

so ist die Lösung der Bewegungsgleichung schwieriger. Das Resultat allerdings ist recht einfach, für kleine Ablenkungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx}{dz} \right|_{z_e} &= -x_0 \frac{2N}{\epsilon\gamma\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)}, \\ \left. \frac{dy}{dz} \right|_{z_e} &= -y_0 \frac{2N}{\epsilon\gamma\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)}. \end{aligned}$$

Man benutzt deshalb zwei Disruptionsparameter:

$$D_x = \frac{2Nr_e\sigma_z}{\gamma\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)} \quad D_y = \frac{2Nr_e\sigma_z}{\gamma\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)}.$$

Für große Ablenkung kann man schreiben

$$\left. \frac{dx}{dz} \right|_{t_e} = \sqrt{\frac{2D_x}{\epsilon\sqrt{3}\sigma_z^2}} x_0 \quad (5)$$

und entsprechend für y . Betrachtet man zwei Teilchen, von denen sich das eine in der xz -Ebene, das andere in der yz -Ebene befindet mit Entfernungen von σ_x beziehungsweise σ_y zur Strahlachse, so zeigt sich, daß die zu erwartenden Winkel in x -Richtung um den Faktor $\sqrt{\sigma_x/\sigma_y}$ größer sind als die in y -Richtung.

2.4 Berechnung der Luminositätszunahme

Läßt man nicht nur ein einzelnes Teilchen durch das entgegenkommende Teilchenpaket laufen, sondern einen ganzen Bunch, so ändert sich ρ auch mit der Zeit, denn die hinteren Teilchen eines Bunches sehen nun einen durch die vorderen Teilchen bereits veränderten Strahl. Die analytische Lösung dieses Problems ist schwierig, daher versucht man den Vorgang zu simulieren. Hierzu existieren die Programme ABEL und MACPAR, die weiter unten vorgestellt werden.

Es ist möglich, aufgrund von Simulationen empirische Formeln zu gewinnen. Um die Ergebnisse, die für ein einzelnes Teilchen gewonnen werden, auf einen ganzen Bunch übertragen zu können, werden die effektiven Strahlausdehnungen eingeführt. Die Ergebnisse sind dann auch für stärkere Fokussierung brauchbar. Die effektiven Ausdehnungen σ'_x und σ'_y ergeben sich aus

$$\sigma'_x \sigma'_y = \frac{\sigma_x \sigma_y}{H_D}. \quad (6)$$

H_D ist der oben erwähnte Luminositäts-Zunahme-Faktor. Simulationen [4] für zylindrische Strahlen ergeben folgende Abhängigkeit für H_D vom Disruptionsparameter D :

$$H_D = 1 + D^{\frac{1}{4}} \left(\frac{D^3}{1 + D^3} \right) \left[\ln(\sqrt{D} + 1) + 2 \ln(0.8\beta^*/\sigma_z) \right], \quad (7)$$

wobei β^* die Betafunktion am Wechselwirkungspunkt ist. Daraus folgten die Erfahrungsregeln für die effektiven Strahlausdehnungen:

$$\begin{aligned} \sigma'_x &\approx \sigma_x H_{D_x}^{-\frac{1}{2}} \\ \sigma'_y &\approx \sigma_y H_{D_y}^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Die so gewonnenen effektiven Strahlausdehnungen können in Gleichung (6) eingesetzt werden und liefern, wie der Vergleich mit den Simulationen weiter unten zeigt, einigermaßen gute Vorhersagen.

2.5 Defokussierung durch einen gleichgeladenen Strahl

Es soll noch kurz der Fall diskutiert werden, daß ein Teilchen einem gleichnamig geladenen Bunch entgegenläuft. Dies wird zwar mit den Elektronen und Positronen aus dem Strahl nicht passieren, wohl aber mit den aus der Paarerzeugung resultierenden.

Zur Vereinfachung wird von einer longitudinal homogenen, zylindersymmetrischen Ladungsverteilung im Bunch ausgegangen. Die transversale Ausdehnung betrage $\sqrt{3}\sigma$, die longitudinale $2\sqrt{3}\sigma_z$. Die Steigung dr/dz der Trajektorie des

Teilchens sei am Anfang null. Außerhalb des Bunches gilt dann:

$$\begin{aligned}\epsilon \frac{d^2 r}{dz^2} &= A \frac{\partial \ln r}{\partial r}, \\ A &= \frac{4r_e}{\gamma} \int_0^{\sqrt{3}\sigma} \rho(r, z) 2\pi dr \\ &= \frac{2D\sigma^2}{\sqrt{3}\sigma_z^2}.\end{aligned}$$

Mit der Bahngleichung $r(z)$ kann man schreiben

$$\begin{aligned}\epsilon \frac{d^2 r}{dz^2} &= A \frac{dz}{dr} \frac{d \ln r(z)}{dz} \\ \epsilon \frac{d^2 r}{dz^2} \frac{dr}{dz} &= A \frac{d \ln r(z)}{dz}.\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Integration über z :

$$\frac{\epsilon \gamma m}{2} \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 = A (\ln r(z_e) - \ln r_0). \quad (9)$$

Aus dieser Gleichung kann man dr/dz am Ende der Wechselwirkung mit dem Bunch näherungsweise bestimmen, indem man aus der anfänglichen zweiten Ableitung der Teilchentrajektorie $d^2 r/dz^2$ die radiale Entfernung am Ende der Wechselwirkung $r(z_e)$ abschätzt. Benutzt wird dabei nur das Potential außerhalb des Strahles. Das Teilchen beginnt bei $r_0 = \sqrt{3}\sigma$. Wäre die transversale Bewegung gleichmäßig beschleunigt, so gälte $r = (1/2)[d^2 r/dz^2]_{z_0} 3\sigma_z^2 + r_0$. Wegen der nur logarithmischen Abhängigkeit der Endgeschwindigkeit von r , kann man dies auch in die Gleichung (9) einsetzen und daraus erhalten

$$\left. \frac{dr}{dz} \right|_{z_e} = \sqrt{\frac{2A}{\epsilon} \ln(D/\epsilon + 1)}.$$

Durch Einsetzen von A erhält man damit:

$$\left. \frac{dr}{dz} \right|_{z_e} \approx \sqrt{4 \frac{\ln(D/\epsilon + 1) D\sigma^2}{\sqrt{3}\sigma_z^2 \epsilon}}. \quad (10)$$

Die Ablenkung läßt sich einfach simulieren, wobei die Ladung longitudinal nicht mehr als gleich- sondern als normalverteilt angenommen wird. Der so bestimmte maximale Ablenkwinkel ist auch von der z -Koordinate bei der Erzeugung abhängig. Ein Teilchen mit geringer Energie erhält den größten Ablenkwinkel, wenn es mehr in der Mitte der Ladungsverteilung erzeugt wird, ein Teilchen hoher Energie hingegen, wenn es am Anfang der Ladungsverteilung erzeugt wird. Die Simulationen stimmen mit der Näherungsformel gut überein.

Will man die Näherung auf den Fall eines flachen Strahles übertragen, so kann σ durch σ'_x (auch in der Definition von D) ersetzt werden. Die Felder in der Nähe und innerhalb des Strahles werden dabei zu gering angesetzt, dementsprechend auch die anfängliche Beschleunigung. Für größere Entfernungen ist die Beschreibung des Potentials richtig.

2.6 Beamstrahlung und Bremsstrahlung

Als Bremsstrahlung wird im folgenden die Strahlung bezeichnet, die ein geladenes Teilchen bei der Streuung am Feld eines einzelnen anderen abgibt. Beamstrahlung wird hingegen die Strahlung genannt, die im kollektiven Feld des entgegenkommenden Bunches erzeugt wird.

Der Wechselwirkungsquerschnitt der Bremsstrahlung ist [31]:

$$\sigma_{brems} \approx \frac{8}{3} \alpha r_e^2 (\ln 4\gamma^2)^2. \quad (11)$$

Für die Linac-Parametersätze mit Energien zwischen 250 GeV und 750 GeV hat der Wirkungsquerschnitt eine Größenordnung von ungefähr 10^{-24} cm^2 . Für die typischen Luminositäten liegt die Anzahl der entstehenden Photonen je Kollision in einer Größenordnung von 10^5 bis 10^6 .

Von besonderer Bedeutung für die Beamstrahlung ist die Kohärenzlänge l_R . Dies ist die Weglänge, die das Elektron zurücklegt, während sein Lichtkegel von einem weit entfernten punktförmigen Detektor wahrgenommen werden kann. Das Elektron emittiert die Photonen in einen Kegel mit einem Öffnungswinkel $1/\gamma$ um seine Flugrichtung, siehe [15]. Aus dem Öffnungswinkel des Lichtkegels $\frac{1}{\gamma}$ und dem Krümmungsradius ρ der Flugbahn ergibt sich

$$l_R = 2 \frac{\rho}{\gamma} = 2 \frac{\hbar \gamma}{mc \Upsilon}$$

mit $\Upsilon = \frac{\hbar \gamma^2}{mc \rho}$. Die kritische Frequenz ist $\omega_c = (3/2) c \gamma^3 / \rho$. Der Krümmungsradius ρ ergibt sich, indem man Gleichung (3) benutzt:

$$\rho = \frac{1}{\left| \frac{d^2 r}{dz^2} \right|} = \frac{\gamma m c^2 \pi \epsilon_0}{e \int_0^r \rho(r', z) 2\pi r' dr'}.$$

Für einen homogenen Zylinder mit der Länge $2\sqrt{3}\sigma_z$ und der radialen Ausdehnungen $\sqrt{3}\sigma$ ergibt sich als maximales Υ für ein Teilchen auf der Oberfläche

$$\Upsilon_{max} \approx \frac{2 N r_e^2 \gamma}{3 \alpha \sigma_z \sigma}.$$

Hierbei ist α die Feinstrukturkonstante. In einem gaußverteilten Strahl ist das mittlere Υ gegeben durch [31]:

$$\langle \Upsilon \rangle \approx \frac{5}{6} \frac{N r_e^2 \gamma}{\alpha \sigma_z (\sigma'_x + \sigma'_y)}. \quad (12)$$

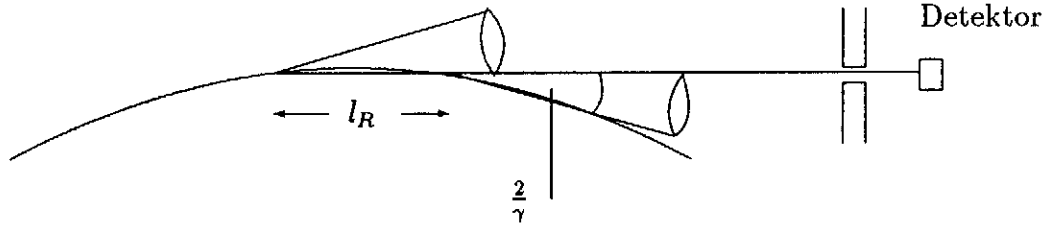


Abbildung 2: Die Kohärenzlänge l_R der Beamstrahlung ist der Weg, den das Elektron zurücklegt, während sein Synchrotronlichtkegel im Detektor sichtbar ist.

Es werden hier die weiter oben erwähnten effektiven Strahlausdehnungen σ'_x und σ'_y benutzt. Für die gegebenen Parametersätze ist Υ klein, nur für einen Parametersatz liegt es über 0.1. Daher ist $l_R \approx 10^{-6}m$. Dies ist sehr viel größer als der mittlere z -Abstand zweier Teilchen in einem Strahl. Daher können die individuellen Felder auf dieser Strecke durch ein mittleres Feld ersetzt werden.

Zur Berechnung der Beamstrahlung verwendet man die gleichen Formeln wie zur Berechnung der Synchrotronstrahlung. Die Bahn des Teilchens wird dabei durch kurze Kreisbahnstücke angenähert. Unter Berücksichtigung der Quanteneffekte erhält man das Sokolov-Ternov-Spektrum [31] [9]:

$$\frac{d\dot{\omega}}{d\omega} = \frac{\alpha}{\sqrt{3\pi}\gamma^2} \left[\int_x^\infty K_{\frac{5}{3}}(x') dx' + \frac{\omega\hbar}{E} \frac{\omega\hbar}{E - \omega\hbar} K_{\frac{2}{3}}(x) \right], \quad (13)$$

mit $x = \frac{\omega}{\omega_c} \frac{E}{E - \omega\hbar}$. Dabei ist $\alpha \approx 1/137$ die Feinstrukturkonstante; $K_{\frac{5}{3}}$ und $K_{\frac{2}{3}}$ sind zugeordnete Besselfunktionen.

Später ergibt sich, daß die Anzahl der Beamstrahlungsphotonen in der Größenordnung der Anzahl der Strahlteilchen ist. Daher kann die Bremsstrahlung gegenüber der Beamstrahlung vernachlässigt werden.

3 Aufstellen und Lösen der Bewegungsgleichungen

Man kann nicht die Bahnen aller 10^{10} Teilchen jedes Strahles berechnen. Abgesehen von der möglicherweise fehlenden numerischen Stabilität ist dies schlicht zu zeitaufwendig. Daher ist es üblich, die Zahl der Teilchen durch Einführen von Makroteilchen zu verringern. Diese repräsentieren jeweils eine bestimmte (nicht notwendig natürliche) Zahl x Elektronen oder Positronen und haben eine Masse $M = xm$ und eine Ladung $Q = \pm xe$. Andere Methoden, wie die Aufteilung des Raumes in Zellen mit anschließender Berechnung der Zellverformung, wurden im Rahmen dieser Arbeit kurz erwogen, aber nicht gewählt, da das im folgende beschriebene Verfahren vielfach erprobt ist. Zudem verwenden die beiden Programme MACPAR und ABEL, die die Strahl-Strahl-Wechselwirkung simulieren, die in diesem Abschnitt beschriebenen Methoden.

Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen für die Makropartikel soll hier etwas ausführlicher behandelt werden, da die Ergebnisse auch für das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Programm TRACKIT benötigt werden.

3.1 Verwenden eines Gitters

Um die Kraft auf ein einzelnes Makroteilchen zu berechnen, kann man dieses als punktförmig annehmen und über die Kräfte, die zwischen ihm und den (relevanten) n_m Makropartikeln des anderen Strahls wirken, summieren. Der Arbeitsaufwand ist jedoch sehr groß, da jedes Teilchen mit jedem anderen mindestens einmal wechselwirken muß, also von der Ordnung $O(n_m^2)$ für zwei Strahlen mit gleicher Teilchenzahl. Außerdem treten bei dicht aneinander vorbeifliegenden Makroteilchen sehr große Streuwinkel auf. Um diese zu vermeiden, könnten die Makropartikel als ausgedehnt angenommen werden, was aber zu einem noch höheren Rechenaufwand führt, da dann nicht nur Monopole sondern auch höhere Pole eingeführt werden müssen.

In der Plasmaphysik ist man deshalb schon lange einen anderen Weg gegangen, [14], [7] und [19]. Hier wird der Raum um den Strahl in $n_x n_y n_z$ Zellen aufgeteilt, wobei n_x , n_y und n_z die Anzahl der Unterteilungen entlang der jeweiligen Koordinatenachse sind. Auf diese Zellen wird die Ladung verteilt, und daraus werden die Potentiale (oder auch die Kräfte) in den einzelnen Zellen berechnet. Mit Hilfe dieser Potentiale können nun leicht die auf ein Teilchen wirkenden Kräfte ermittelt werden. Das Verfahren wird englisch *particles-in-cells*, also Teilchen in Zellen, genannt. Das Gitter wird dabei mit dem Strahl mitbewegt. Im einfachsten Fall wird die Ladung eines Makroteilchens nur der Zelle zugeschlagen, in der sich sein Mittelpunkt befindet, besser ist es jedoch, wenn man annimmt, das Teilchen habe eine räumliche Ladungsverteilung, man spricht dann oft von *clouds-in-cells*, Wolken in Zellen. So kann das Makroteilchen als homogene, rechteckige Ladungs-

wolke mit der Größe einer Zelle verstanden werden. Seine Ladung verteilt sich dann auf jeweils vier Gitterzellen.

Dieses Verfahren bringt den zusätzlichen Vorteil, daß das Problem in eine Reihe zweidimensionaler Aufgaben zerlegt werden kann, da die Felder der Teilchen im ultrarelativistischen Fall nur transversal sind. Schließlich wechselwirken nur Makroteilchen der gleichen Scheibe — das heißt mit gleicher z -Koordinate — miteinander, wobei die Zeit zum Ausbreiten der Felder vernachlässigt wird. Das Potential am Ort (x_0, y_0) kann nun entweder mit Hilfe einer Greensfunktion

$$\Phi(x, y) = \iint \frac{1}{2} \frac{\rho(x', y')}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{x_c y_c} dx' dy'$$

oder mit Hilfe der Poissongleichung

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho(x, y)}{\epsilon_0}$$

aus der Ladungsdichte ρ bestimmt werden, wobei Δ der zweidimensionale Laplaceoperator ist.

3.2 Berechnung der Potentiale mit der Greensfunktion

Als einfachste Umsetzung der Methode der Greensfunktion kann man annehmen, daß sich die Ladung jeder Zelle in ihrem Mittelpunkt befindet, und dann über diese Punktladungen summieren. Es ergibt sich als Potential in der Mitte der Zelle (i_0, j_0) :

$$\Phi_{i_0, j_0} = \sum_{i, j} Q_{i, j} \frac{\ln(((i - i_0)\Delta x)^2 + ((j - j_0)\Delta y)^2)}{4\pi\epsilon_0}$$

Die Ausdehnungen jeder Zelle sind dabei durch Δx und Δy gegeben. Eine Verbesserung ergibt sich, wenn man annimmt, daß die Ladung einer Zelle homogen verteilt ist. Das Potential, das die Zelle (i, j) mit den Mittelpunktskoordinaten (x, y) und der Ladungsdichte $\rho_{i, j}$ im Mittelpunkt einer anderen Zelle (i_0, j_0) mit der Mitte bei (x_0, y_0) verursacht, ist gegeben durch

$$\Phi'_{i_0, j_0} = \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} \rho_{i, j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2) dx' dy'.$$

Ausführen der unbestimmten Integration

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \ln(x'^2 + y'^2) dx' dy'$$

ergibt

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[xy \ln(x^2 + y^2) + x^2 \operatorname{atan} \frac{y}{x} + y^2 \operatorname{atan} \frac{x}{y} - 3xy \right]. \quad (14)$$

Damit folgt:

$$\Phi_{i_0, j_0} = \sum_{i, j} \frac{Q_{i, j}}{\Delta x \Delta y} \left[F \left(\left(i - i_0 + \frac{1}{2} \right) \Delta x, \left(j - j_0 + \frac{1}{2} \right) \Delta y \right) - F \left(\left(i - i_0 - \frac{1}{2} \right) \Delta x, \left(j - j_0 + \frac{1}{2} \right) \Delta y \right) - F \left(\left(i - i_0 + \frac{1}{2} \right) \Delta x, \left(j - j_0 - \frac{1}{2} \right) \Delta y \right) + F \left(\left(i - i_0 - \frac{1}{2} \right) \Delta x, \left(j - j_0 - \frac{1}{2} \right) \Delta y \right) \right]. \quad (15)$$

Speichert man die Werte des Termes in den eckigen Klammern in einer Matrix, so ist dieses Verfahren genauso schnell wie das ungenauere, bei dem die Ladung in die Mitte der Zelle gesetzt wurde. Der Arbeitsaufwand beider Verfahren ist allerdings immer noch von der Ordnung $O((n_x n_y n_z)^2)$ und damit nur dann geringer als bei der Summation über die Makroteilchen, wenn die Zahl der Zellen kleiner als die der Makroteilchen ist. Da diese beiden oft ähnlich groß sind, wird also nur die Stabilität des Verfahrens verbessert. Die zeitaufwendige Summation in Gleichung (15) kann allerdings mit Hilfe der Fouriertransformation vermieden werden, wie im folgenden gezeigt wird.

3.3 Anwenden der Fouriertransformation

Das Faltungstheorem ermöglicht die Faltung zweier durch Fouriersummen darstellbarer Funktionen durch Produktbildung ihrer Fourierkoeffizienten [14] [22]. Um dieses Verfahren für einen nichtperiodischen Fall anwenden zu können, muß dieser zunächst in einen periodischen umgewandelt werden. Durch einen Trick kann die Wirkung der Periodizität später wieder entfernt werden. Betrachtet man eine Scheibe mit den Grenzen $[x_-, x_+]$ und $[y_-, y_+]$, so ist das Potential Φ an einer beliebigen Stelle (x_0, y_0) gegeben durch

$$\Phi(x_0, y_0) = \int_{x_-}^{x_+} \int_{y_-}^{y_+} \rho(x, y) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln((x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2) dx dy, \quad (16)$$

wobei ρ die Linienladungsdichte ist. Werden sowohl das Potential Φ als auch die Ladungsdichte ρ und die Greensfunktion $g(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln(x^2 + y^2)$ als Fouriersummen geschrieben, so ist Φ leicht bestimmbar. Der Argumentbereich von g für $(x - x_0)$ reicht von $-(x_+ - x_-)$ bis $(x_+ - x_-)$ und für y entsprechend. Um den Definitionsbereich der Ladungsdichte ρ entsprechend zu erweitern, wird diese einfach außerhalb der ursprünglichen Scheibe null gesetzt. Verwendet man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_- = y_- = 0$, so gilt mit den Abkürzungen $L_x = 2x_+$, $L_y = 2y_+$, $k_n^{(x)} = n\pi/L_x$ und $k_m^{(y)} = m\pi/L_y$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{n, m} \Phi_{n, m} e^{i(k_n^{(x)} x + k_m^{(y)} y)},$$

$$\rho(x, y) = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{n,m} \rho_{n,m} e^{i(k_n^{(x)} x + k_m^{(y)} y)},$$

$$g(x, y) = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{n,m} g_{n,m} e^{i(k_n^{(x)} x + k_m^{(y)} y)}.$$

Da die Integration in Gleichung (16) auch auf den Bereich außerhalb der Scheibe ausgedehnt werden darf (dort gilt $\rho = 0$) folgt:

$$\Phi(x_0, y_0) = \frac{1}{(L_x L_y)^2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sum_{n_1, m_1} \rho_{n_1, m_1} e^{i(k_{n_1}^{(x)} x + k_{m_1}^{(y)} y)} \sum_{n_2, m_2} g_{n_2, m_2} e^{i(k_{n_2}^{(x)}(x_0 - x) + k_{m_2}^{(y)}(y_0 - y))} dx dy$$

$$\Phi(x_0, y_0) = \frac{1}{(L_x L_y)^2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sum_{n_1, n_2, m_1, m_2} \rho_{n_1, m_1} g_{n_2, m_2} e^{i((k_{n_1}^{(x)} - k_{n_2}^{(x)})x + (k_{m_1}^{(y)} - k_{m_2}^{(y)})y)} e^{i(k_{n_2}^{(x)} x_0 + k_{m_2}^{(y)} y_0)} dx dy.$$

Bei der Integration über x, y fallen alle Terme mit $k_{n_1}^{(x)} \neq k_{n_2}^{(x)}$ oder $k_{m_1}^{(y)} \neq k_{m_2}^{(y)}$ weg. Es ergibt sich somit

$$\frac{1}{L_x L_y} \sum_{n,m} \Phi_{n,m} e^{i(k_n^{(x)} x_0 + k_m^{(y)} y_0)} = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{n,m} \rho_{n,m} g_{n,m} e^{i(k_n^{(x)} x_0 + k_m^{(y)} y_0)}.$$

Da dies für alle (x_0, y_0) gelten muß, folgt aus der Orthogonalität der Exponentialfunktionen

$$\Phi_{n,m} = \rho_{n,m} g_{n,m}.$$

Da in den Programmen die Potentiale an diskreten Stellen bestimmt werden müssen, kann eine endliche Fouriersumme benutzt werden, die mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation einfach zu berechnen ist. Die Periodizität der einen Funktion wirkt sich im Potential nicht mehr aus, da nur über ein Periodizitätsintervall integriert wurde, diese Funktion ist außerhalb des Intervalles null. Die der anderen führt zu einer zyklischen Lösung, die innerhalb des Intervalles $[0; L/2]$ korrekt ist, siehe Abbildung 3.

Dieses Verfahren ist von der Ordnung $O(n_x n_y n_z^2 \ln(n_x n_y))$ und damit für große Gitter sehr viel besser als die einfache Summation.

3.4 Lösung mit Hilfe der Poissongleichung

In der Poissongleichung kann der Laplace-Operator näherungsweise durch den Differenzenquotienten ersetzt werden. Es ergibt sich

$$\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = -\frac{Q_{i,j}}{\Delta x \Delta y \epsilon_0}.$$

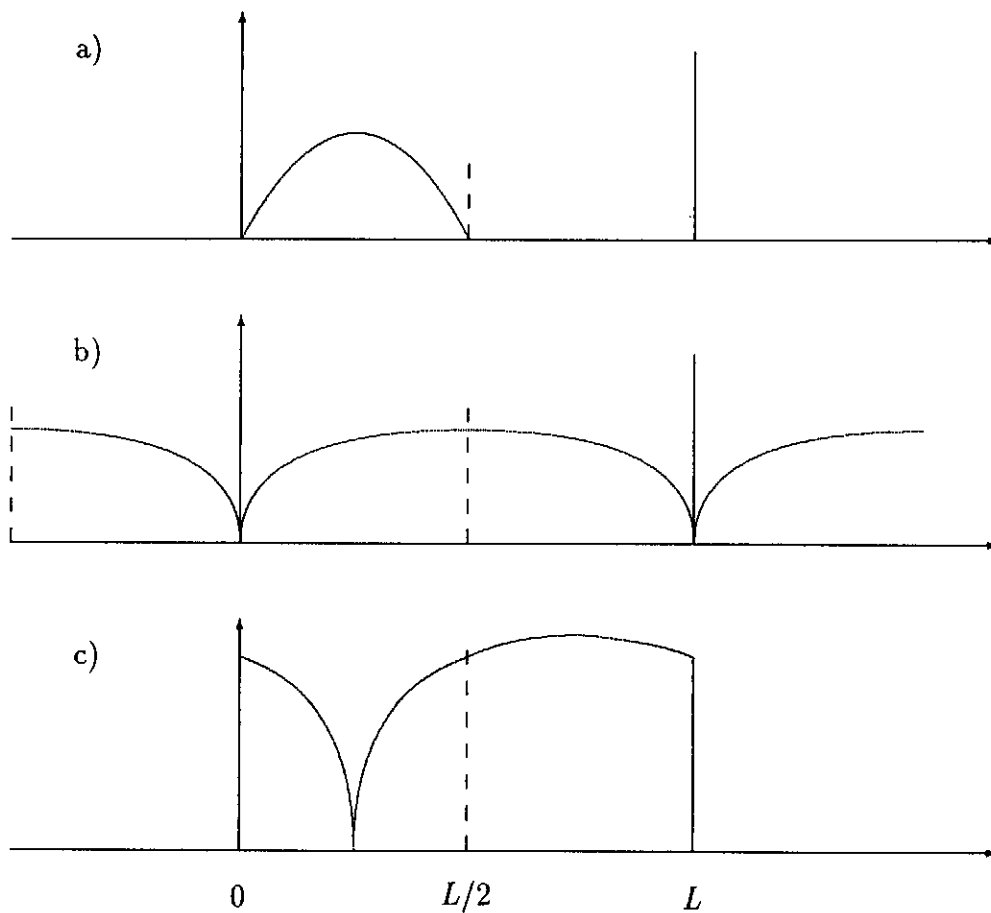


Abbildung 3: Faltung zweier Funktionen durch Fouriertransformation. Die Funktion in a) ist nur innerhalb des Intervalles $[0; L]$ nicht null. Faltet man sie durch Fouriertransformation mit einer anderen b) , die im Intervall $[-L/2; L/2]$ korrekt ist und außerhalb periodisch fortgesetzt wird, so ergibt sich eine periodische Lösung c), die im Intervall $[0; L/2]$ korrekt ist.

Werden die Potentiale für den Rand explizit berechnet, erhält man ein lineares Gleichungssystem mit $n_x n_y$ Unbekannten, nämlich den Potentialen $\Phi_{i,j}$. Das Gleichungssystem kann mit einem Zeitaufwand der Ordnung $O((n_x n_y)^3)$ mit dem Gauß'schen Dreiecksverfahren LU^3 zerlegt werden. Für jede Wechselwirkung einer Scheibe mit einer anderen sind nun der Ordnung $O((n_x n_y)^4)$ Schritte erforderlich. Insgesamt ergeben sich also, da jede Scheibe einmal mit jeder anderen wechselwirken muß, $O((n_x n_y n_z)^2)$ Schritte und damit keine Verbesserung gegenüber den Verfahren mit einfacher Summation. Diese kommt erst zustande, wenn man ein anderes Lösungsverfahren wählt. Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems ist sehr dünn besetzt, da in jeder der $n_x n_y$ Zeilen nur fünf der $n_x n_y$ Koeffizienten von Null verschieden sind. Es gibt eine Reihe von Methoden, derartige Gleichungssysteme schneller als mit dem Gaußverfahren zu lösen. Im allgemeinen handelt es sich dabei um iterative Verfahren. Diese beginnen mit einem Startvektor \vec{x}_i als Lösungsversuch und berechnen die Residuen durch Einsetzen in die ursprüngliche Matrix A . Mit Hilfe der Residuen wird ein neuer, gewöhnlich besserer Lösungsvektor \vec{x}_{i+1} ermittelt, für den nun die Prozedur von neuem beginnen kann. Unterschreiten die Residuen eine gewünschte Genauigkeitsgrenze, so ist die Lösung \vec{x}_{i+1} gefunden. Iterative Verfahren können deutlich unterschiedliche Konvergenzgeschwindigkeit besitzen, abhängig von dem Startvektor, dem Verfahren zur Verbesserung der Vektoren und dem Typ der Matrix. Daher ist eine Bestimmung der notwendigen Rechenzeit nicht allgemein möglich. Da zusätzlich zur Lösung des linearen Gleichungssystems die Potentiale am Rand des Gitters explizit berechnet werden müssen, ist der Aufwand jedoch mindestens von der Ordnung $O(n_x n_y (n_x + n_y))$.

3.5 Integration der Bewegungsgleichungen und Berechnung der Beamstrahlung

Im Abschnitt 6.4 wird noch einmal auf die Lösung der Bewegungsgleichungen eingegangen. Im Programm MACPAR wird die Integration mit Hilfe der einfachen Regel

$$\begin{aligned}\vec{x}(t + \Delta t) &= \vec{x}(t) + \vec{v}(t)\Delta t \\ \vec{v}(t + \Delta t) &= \vec{v}(t) + \vec{a}(\vec{x})\Delta t\end{aligned}$$

durchgeführt.

³Bei der LU -Zerlegung werden aus der Koeffizientenmatrix A des Gleichungssystems zwei neue Matrizen L und U gewonnen mit $A = LU$. L und U sind dabei Dreiecksmatrizen (aus dem Englischen *lower* beziehungsweise *upper triangular matrix*). $A\vec{x} = \vec{y} = L(U\vec{x})$ kann durch $L\vec{y}' = \vec{y}$ und $U\vec{x} = \vec{y}'$ gelöst werden. Die Gleichungssysteme mit den Dreiecksmatrizen können durch einfaches Einsetzen gelöst werden. Während die LU -Zerlegung einer $n \times n$ -Matrix der Ordnung $O(n^3)$ Rechenschritte erfordert, werden für die Lösung der beiden Gleichungssysteme anschließend nur $O(n^2)$ Schritte benötigt.

Bei der Berechnung der Beamstrahlung wird die Bahn des Teilchens durch einen Kreisbogen angenähert. Dazu werden der vorhergehende, der augenblickliche und der in diesem Schritt zu erreichende Punkt benötigt. Der Radius der Bahn ist dann einfach durch

$$\rho = \frac{v_z^2}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

gegeben. Das von einem Makroteilchen abgestrahlte Beamstrahlungsspektrum läßt sich hieraus durch Anwenden der Gleichung (13) berechnen.

4 Simulationsprogramme

4.1 Das Programm MACPAR

MACPAR ist ein Programm zur Simulation der Strahl-Strahl-Wechselwirkung in Linearbeschleunigern, das uns freundlicherweise Herrn HÄNSSGEN zur Verfügung stellte. Es wurde von S. RITTER entwickelt und in Fortran IV kodiert [23] und in Novosibirsk benutzt und weiterentwickelt um auch Simulationen von Untergrundprozessen durchführen zu können [17] [11] [12] [13]. Diese Version wurde allerdings nicht verwendet, da sie die Spurverfolgung der entstandenen Teilchen noch nicht enthielt.

In MACPAR wird zur Simulation des Pincheffektes die *particle-in-cells*-Methode verwendet. Dabei wird für die einzelnen Zellen die Coulombkraft sowohl in x - als auch in y -Richtung durch einfache Summation berechnet. Die Ladung wird innerhalb einer Zelle als homogen verteilt angenommen. Zur Steigerung der Rechengeschwindigkeit wird weiter angenommen, daß die beiden Strahlen punktsymmetrisch sind, so daß nur einer gespeichert — und verfolgt — werden muß. Die Synchrotronstrahlung wird mit der klassischen Formel berechnet und die Spektren in einem Histogramm summiert. Die Strahlungsdichten in den Zellen werden ebenfalls berechnet und in einer Tabelle gespeichert. Dabei wird die Photonendichte ρ_γ faktorisiert $\rho_\gamma(\omega, \vec{x}) = \rho_1(\omega)\rho_2(\vec{x})$.

Die erzeugten Photonen werden nicht zu Makroteilchen zusammengefaßt, sondern in einer großen Tabelle (SYNRHO) abgespeichert. Dabei wird angenommen, daß sich die Photonen in Richtung des Makroteilchens bewegen. Nicht mehr benötigte Photonendichten (der Zeitschritt ist vorüber) oder solche, die außerhalb der Wechselwirkungszone liegen werden entfernt, beziehungsweise gar nicht erst gespeichert. Der benötigte Speicherplatz ist daher $p(n_x, n_y, n_z)O\left(n_x n_y \frac{1}{2}(n_z^2 + n_z)\right)$.

Das Programm befand (und befindet) sich im Entwicklungsstadium, und so war in diesem Programmteil noch ein Fehler enthalten. Während der ersten Hälfte der Simulation arbeitete die Abspeicherung korrekt, in der zweiten Hälfte allerdings lieferte sie falsche Dichten, siehe Abbildung 4. Da der Algorithmus zur Speicherung der Photonen nicht dokumentiert ist, habe ich versucht, ihn anhand des ersten Teils der Simulation zu rekonstruieren. In der Tabelle werden zu dieser Zeit die Photonendichten einer Scheibe aufeinander folgend abgelegt.

Die von einem Elektron erzeugten Beamstrahlungsphotonen bleiben in der gleichen Scheibe wie das Elektron, da sie sich mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen. Transversal ändern sie jedoch ihre Position. Da die Photonen nur mit den entgegenkommenden Teilchen wechselwirken, genügt es, sie während der Durchdringung der beiden Bunche zu speichern. Erreicht also eine Scheibe die Wechselwirkungszone, so verbleiben ihr noch n_z Zeitschritte in dieser. Daher muß Speicherplatz für n_z Photonenscheiben, die jeweils zu einem Abschnitt zusammengefaßt sind, bereitgestellt werden. In der ersten Scheibe wird nun für jedes Photon gemäß seiner x, y -Koordinate die Photonendichte erhöht, in der zweiten

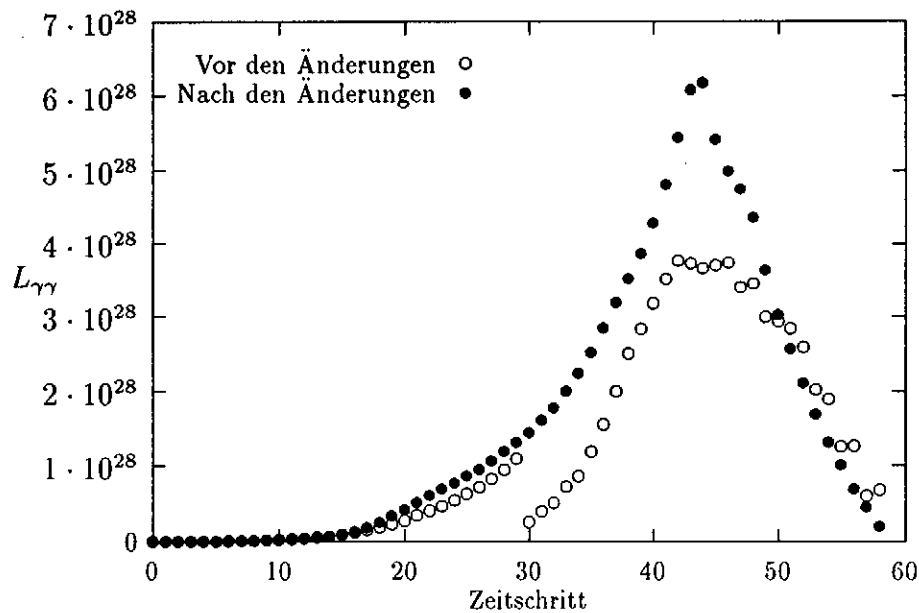


Abbildung 4: Die $\gamma\gamma$ -Luminosität in $[\text{cm}^{-2}]$ je Zeitschritt vor und nach den Korrekturen im Programm MACPAR. Die leichten Unterschiede vor dem 30. Zeitschritt resultieren aus der Änderung der Transversalgeschwindigkeit.

wird jedes Photon entsprechend seiner x, y -Koordinate einen Zeitschritt später hinzugefügt und so weiter. Die so erzeugten Photonendichten werden in der Tabelle SYNRRHO an die bereits gespeicherten Dichten angehängt. Beim nächsten Schritt wird die erste Scheibe jedes Abschnitts nicht mehr benötigt und daher durch Vorziehen der folgenden entfernt. Die neuen Photonen werden nun, beginnend mit der ehemals zweiten Scheibe dieses Abschnitts, für die noch verbleibenden $(n_z - 1)$ Zeitschritte eingeordnet.

Durch eine Korrektur der Formeln zur Berechnung der Zugriffsadresse in der Tabelle SYNRRHO konnte der obengenannte Fehler behoben werden. Die Unterschiede in den $e\gamma$ - und $\gamma\gamma$ -Luminositäten sind beträchtlich, siehe Abbildung 4 für den Vergleich der $\gamma\gamma$ -Luminositäten. Ein anderer Fehler bewirkte, daß die Photonen sich nicht mit den Transversalgeschwindigkeiten v_x und v_y der Elektronen bewegten, sondern mit den negativen Werten $-v_x$ und $-v_y$, dieser Fehler hat allerdings keinen großen Einfluß, da die transversale Geschwindigkeit der Elektronen nicht sehr groß ist.

Die Bestimmung der elektromagnetischen Felder in MACPAR enthielt ebenfalls einen Fehler. Die Zeit Δt für einen Zeitschritt wird als $\Delta t = \Delta z/c$ aus der Zellenausdehnung in z -Richtung Δz berechnet. Da die Relativgeschwindigkeit aber $2c$ beträgt (im Laborsystem), ist Δt zu groß. In die Transversalgeschwindigkeit der

Makroteilchen geht die Länge des Zeitintervalles in MACPAR quadratisch ein:

$$\begin{aligned}v_{i+1} &= v_i + a_i \Delta t \\ a_i &= F(x, y, z) \Delta t.\end{aligned}$$

Sie würde daher viermal zu groß werden. Die in MACPAR berechneten Felder sind allerdings nur halb so groß wie die tatsächlichen, so daß die Geschwindigkeiten nur doppelt so groß sind. Die Felder werden in dem Programm explizit in einer eigenen Zeile mit 2 multipliziert, dies wurde aus der Bestimmung der Feldstärke entfernt. Bei der Berechnung der Beamstrahlung wurde ebenfalls die Relativgeschwindigkeit c angenommen, so daß die ermittelten kritischen Energien (bei korrekter Feldberechnung) nur ein Viertel der tatsächlichen Werte erhielten:

$$\rho \approx \frac{v_z^2}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \propto \frac{1}{E_c}$$

Dafür wurde die Länge der Zeitintervalle, in denen die Photonen emittiert wurden ebenfalls um den Faktor 2 überschätzt, so daß zusammen mit den doppelt so großen Feldstärken, die richtige Zahl an Photonen entstand. Die mittlere Energie je Photon war jedoch zu klein, die Luminositätszunahme H_D zu groß.

4.2 Änderungen an MACPAR

Außer den Korrekturen an dem Programm MACPAR wurden im Rahmen dieser Arbeit noch einige weitere Änderungen vorgenommen. So wird jetzt zur Erzielung einer besseren Statistik nach jedem Programmlauf der aktuelle Stand des Zufalls-generators abgespeichert und beim nächsten Start geladen. Kleinere Modifikationen ermöglichen nun eine Eingabe der Teilchenzahl über die Parameterdatei.

Ursprünglich entsprach die Ladungsverteilung in MACPAR longitudinal einer Gaußverteilung, die bei $\pm\sigma_z$ abgeschnitten ist. Da die ganze Ladung in diesem Intervall untergebracht wurde, ergab sich dort eine rund anderthalb mal größere Ladungsdichte, als bei einem normalverteilten Strahl. Anders als die transversale Ausdehnung ließ sich dies nicht durch Parameter ändern. Die Länge wurde daher fest auf $\pm 2\sigma_z$ erweitert. Die Werte für die maximale Defokussierung der erzeugten Teilchen entsprechen nach dieser Änderung recht gut den weiter oben näherungsweise ermittelten. Vorher waren sie deutlich zu groß.

Damit das Programm TRACKIT, das die inkohärente Paarerzeugung simuliert, auf MACPAR aufbauen kann, wird nach jedem Zeitschritt die Elektronen- und Photonendichte in eine Binärdatei geschrieben, ebenso das Photonen- und Elektronenspektrum. Zu Programmbeginn werden in dieser Datei die Parameter der Simulation gespeichert. Während das Photonenspektrum bereits zur Verfügung steht, muß das Elektronenspektrum jeweils neu erzeugt werden.

4.3 Das Programm ABEL

Dieses Programm wurde von K. Yokoya entwickelt [30]. P. Chen stellte uns eine Version zur Verfügung, die ähnlich wie MACPAR den Pincheffekt simuliert, nicht aber die Paarerzeugung⁴. Auch ABEL verwendet die *particle-in-cells*-Methode, dabei stehen mehrere Methoden der Feldberechnung zur Verfügung. So kann etwa die Lösung der Poissongleichung mit Hilfe des Cholskyverfahrens oder der Methode der schnellen Fouriertransformation berechnet werden. Für sehr flache Strahlen kann ein besonderes zweidimensionales Verfahren gewählt werden.

ABEL ist nicht so leicht auf andere Rechner zu übertragen wie MACPAR, zur Anpassung an die VAX mußten daher einige Änderungen vorgenommen werden. So wurden etwa die nicht vorhandenen Graphikroutinen durch leere Unterprogramme ersetzt, die nur die passenden Schnittstellen haben. Auch setzt das Programm voraus, daß bei dem Rechner die Überprüfung auf die Überschreitung des Wertebereichs der Variablen vom Typ INTEGER abschaltbar⁵ ist und daß Tabellen der Länge null übergeben werden können, sowie daß einige Erweiterungen zum Fortran 77-Standard vorhanden sind (etwa NAMELIST). Allerdings enthielt ABEL noch eine Reihe von inkonsistenten Datentypdefinitionen an den Schnittstellen der Unterprogramme, die auf der VAX teilweise zum Programm-Abbruch führten. Diese konnten jedoch behoben werden.⁶

4.4 Vergleich der beiden Programme

ABEL und MACPAR benutzen die gleichen physikalischen und mathematischen Modelle, daher kann ihr Vergleich keinen Hinweis auf deren Korrektheit geben. Die verwendeten Algorithmen aber unterscheiden sich deutlich, so daß man mehr über die numerische Stabilität erfahren kann.

Die Ergebnisse von MACPAR und ABEL sind vereinbar. Es gibt allerdings merkbare Unterschiede, die auch nicht verschwinden, falls die Simulationsparameter verändert werden, also zum Beispiel die Zellenzahl erhöht wird. In der Tabelle 2 auf Seite 57 sind einige Simulationsergebnisse der beiden Programme aufgeführt.

⁴Es existieren wohl auch zwei neuere Versionen, die ebenfalls die Paarerzeugung berechnen, eine von ihnen ist seit kurzem auch am DESY vorhanden allerdings noch nicht implementiert.

⁵Zur Erzeugung der Pseudozufallszahlen wird in ABEL ein Verfahren verwendet, das implizit die Darstellung der ganzen Zahlen durch 32 Bit im Zweierkomplement benutzt. Die Rechnung erfolgt also modulo 2^{31} .

⁶Diese Fehler haben sich bei den Rechenläufen der Autoren des Programms wahrscheinlich nicht bemerkbar gemacht da bei geeignetem Zahlenformat das vordere Wort eines DOUBLE PRECISION- und eines REAL-Wertes gleich sind.

5 Paarproduktion

Elektronen und Positronen, die beim Durchdringen der beiden Bunche durch Paarerzeugung entstehen, können störenden Untergrund im Experiment verursachen. Zum ersten werden sie, da sie eine wesentlich geringere Energie als die Strahlteilchen besitzen, durch die Strahlungsfelder stärker abgelenkt. Insbesondere in dem Fall, daß sie dem gleichgeladenen Strahl entgegenfliegen, also von ihm defokussiert werden, können sie beträchtliche Transversalgeschwindigkeiten erreichen. Zum anderen besitzen sie teilweise bereits bei der Entstehung große Winkel zur Strahlachse und hohe Transversalimpulse. Diese Teilchen können möglicherweise den Detektor treffen.

Es gibt zwei wesentliche Prozesse, durch die Elektron-Positron-Paare erzeugt werden, und zwar die kohärente und die inkohärente Paarerzeugung. Dabei überwiegt für große Υ , das heißt $\Upsilon \gg 1$, die kohärente, für $\Upsilon < 1$ die inkohärente [31] [26].

5.1 Die kohärente Paarerzeugung

Jedes Photon enthält einen Anteil an virtuellen Positron-Elektron-Paaren. Durch ein äußeres elektromagnetisches Feld kann das Paar auf die Massenschale gebracht werden. Diesen Prozeß nennt man kohärente Paarerzeugung. Seine niedrigste Ordnung erhält man aus der Synchrotronstrahlung, indem dort das einlaufende Elektron mit dem auslaufenden Photon vertauscht wird. Die Wahrscheinlichkeit für ein Photon der Energie $\hbar\omega$ im Zeitintervall $[t; t + dt]$ ein Paar zu erzeugen bei dem die Energie des Positrons im Intervall $[E_+; E_+ dE_+]$ liegt ist [31]:

$$d^2 w_k = \frac{\alpha E_+^2}{\sqrt{3\pi\hbar}(\hbar\omega)^2} \left[\int_x^\infty K_{\frac{1}{3}}(x') dx' + \left(\frac{E_+}{E_-} + \frac{E_-}{E_+} \right) K_{\frac{2}{3}} \right] dE_+ dt$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_c} \frac{E_b^2}{E_+ E_-}$$

wobei E_- die Energie des Elektrons, E_+ die des Positrons und E_b die der Strahlteilchen ist. Für kleine Werte Υ ergibt die Integration über E_+ :

$$\dot{w}(\omega) \approx 0.16 \frac{\alpha\omega_c}{\gamma^2}$$

Für eine über die gesamte Wechselwirkung konstante Energie, kann die Anzahl der produzierten Paare je Strahlteilchen durch

$$n_k = \int_{t_0}^{t_e} dt_1 \int_{t_1}^{t_e} dt_2 \int_0^{\frac{E_b}{\hbar}} d\omega \frac{d\dot{w}}{d\omega} \dot{w}_k(\omega)$$

berechnet werden. Die Integration über t_1 und t_2 liefert $(t_e - t_0)^2/2$. Es ergibt sich näherungsweise für kleine Υ :

$$n_k \approx \left(\frac{\alpha \sigma_z m c}{\gamma \hbar} \Upsilon \right)^2 \frac{7}{128} \exp\left(-\frac{16}{3} \Upsilon\right)$$

Für typische Beschleuniger ist $\Upsilon \ll 0.3$. Daher kann auf die Berücksichtigung der kohärenten Paarerzeugung verzichtet werden.

5.2 Inkohärente Paarerzeugung

Die inkohärente Paarerzeugung erfolgt über drei verschiedene Prozesse — den Breit-Wheeler-Prozeß:

$$\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$$

den Bethe-Heitler-Prozeß:

$$e\gamma \rightarrow e(e^+e^-)$$

und den Landau-Lifschitz-Prozeß:

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^-e^+e^-$$

Die Feynman-Graphen dieser drei Prozesse in den Abbildungen 5a)-c) zeigen, daß die Prozesse nahezu gleich sind. Nur sind in den letzten beiden Fällen eines beziehungsweise zwei der Photonen virtuell. Wie sich im weiteren herausstellen wird, ist der Beitrag des Breit-Wheeler-Prozesses relativ klein. Sein Wirkungsquerschnitt ist jedoch am leichtesten zu berechnen, und die anderen Prozesse können auf ihn zurückgeführt werden.

Dazu wird die sogenannte äquivalente Photonennäherung verwendet, die es gestattet, das virtuelle Photonenspektrum des Elektrons oder Positrons durch ein äquivalentes reelles zu ersetzen. Sei $\sigma(\omega_1, \omega_2)$ der Wirkungsquerschnitt der Reaktion $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$ für zwei reelle Photonen der Energien $\hbar\omega_1$ beziehungsweise $\hbar\omega_2$, so läßt sich schreiben:

$$\langle \sigma_{BW} \rangle = \int_{\frac{(mc^2)^2}{\hbar^2 \omega_1}}^{\omega_m} \int_{\frac{(mc^2)^2}{\hbar^2 \omega_m}}^{\omega_m} n_b(\omega_1) n_b(\omega_2) \sigma(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (17)$$

wobei $n_b(\omega)$ das Beamstrahlungsspektrum je Strahlteilchen ist; die Maximalfrequenz ω_m entspricht der maximalen Teilchenenergie $E_b = \hbar\omega_m$. Die unteren Grenzen der Intervalle ergeben sich aus der Bedingung an die Photonenenergien $\hbar\omega_1 \hbar\omega_2 \geq (mc^2)^2$. Wird eines der Spektren durch das einem Elektron oder Positron äquivalente Photonenspektrum $n_v(\omega)$ ersetzt, so erhält man den Wirkungsquerschnitt für den Bethe-Heitler-Prozeß:

$$\langle \sigma_{BH} \rangle = \int_{\frac{(mc^2)^2}{\hbar^2 \omega_1}}^{\omega_m} \int_{\frac{(mc^2)^2}{\hbar^2 \omega_m}}^{\omega_m} n_v(\omega_1) n_b(\omega_2) \sigma(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2.$$

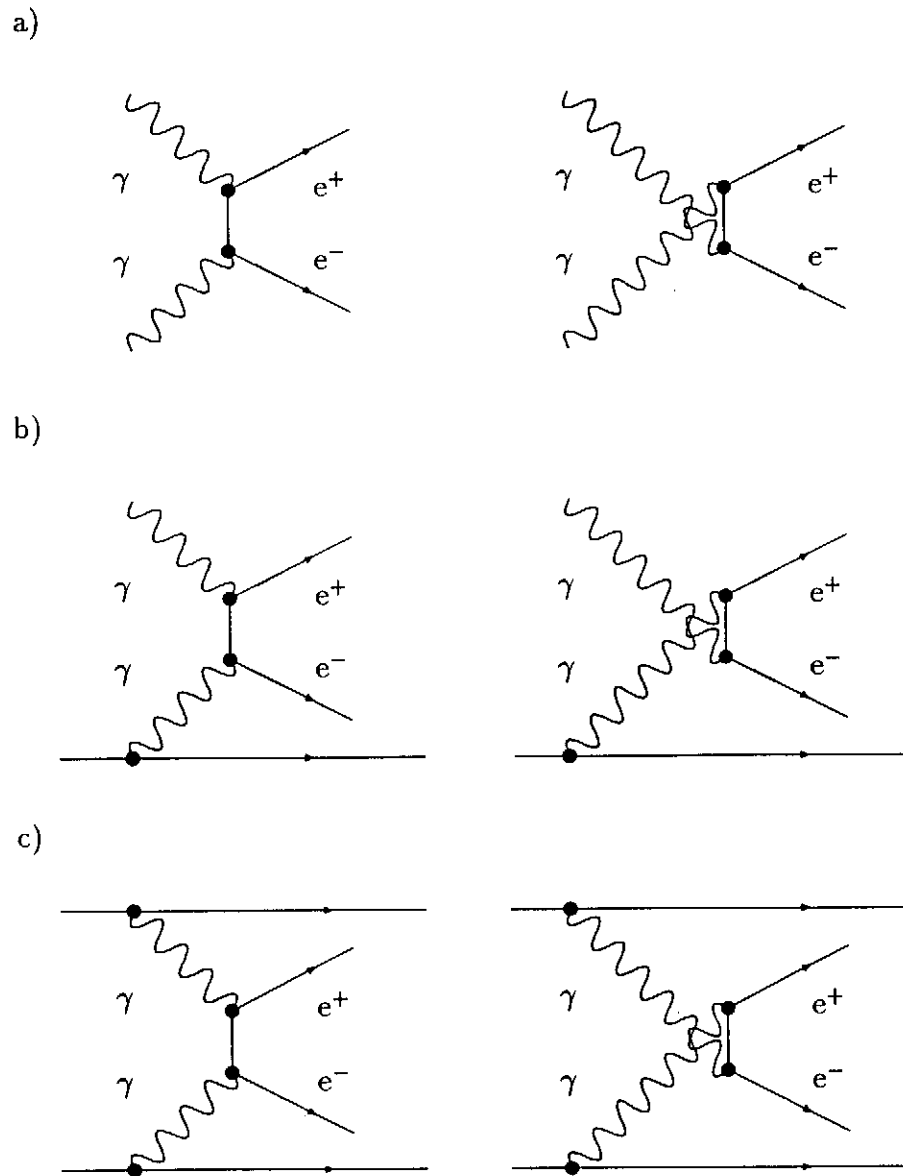


Abbildung 5: Die Feynmandiagramme der drei inkohärenten Paarerzeugungsprozesse. a) ist der Breit-Wheeler-Prozeß, b) der Bethe-Heitler-Prozeß und c) der Landau-Lifschitz-Prozeß

Ersetzt man beide Spektren durch $n_v(\omega)$, so folgt der Landau-Lifschitz-Wirkungsquerschnitt:

$$\langle \sigma_{LL} \rangle = \int_{\frac{(mc^2)^2}{\hbar^2 \omega_1}}^{\omega_m} \int_{\frac{(mc^2)^2}{\hbar^2 \omega_m}}^{\omega_m} n_v(\omega_1) n_v(\omega_2) \sigma(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2$$

5.3 Methode der äquivalenten Photonen

Ein virtuelles Photon unterscheidet sich von einem reellen dadurch, daß $k^2 \neq 0$ gilt, das heißt, daß es nicht auf der Massenschale liegt. Nun ist zu erwarten, daß ein Photon, für das $|k^2|$ klein ist, nur wenig von einem reellen verschieden ist. In gewissen Grenzen kann daher das virtuelle Spektrum durch ein äquivalentes reelles Spektrum ersetzt werden.

Eine Herleitung kann man in [18] finden. Es ergeben sich folgende Bedingungen für die Gültigkeit der Approximation:

$$|k_{\perp}|c \ll \hbar\omega \ll E_b \quad (18)$$

$$\frac{\hbar\omega}{\gamma^2} \ll |k_{\perp}|c \ll \frac{E_b}{\gamma}, \quad (19)$$

wobei E_b und m die Energie und die Masse des emittierenden Teilchens, also des Strahlteilchens, und ω sowie k_{\perp} die Energie und der Transversalimpuls des Photons sind. Zudem gilt $E_b = \gamma mc^2$. Entscheidend ist außerdem die Forderung, daß das Teilchen ultrarelativistisch sein muß. Die Bedingungen aus (18) sind im Schwerpunktsystem des erzeugten Paares immer erfüllt

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich das äquivalente Spektrum zu

$$n(\omega, k_{\perp}) d\omega dk_{\perp} = \frac{\alpha}{\pi^2} \frac{k_{\perp}^2 c^4 dk_{\perp}}{\left((k_{\perp} c)^2 + \frac{(\hbar\omega)^2}{\gamma^2} \right)^2} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (20)$$

Es wird nun über den Transversalimpuls integriert, um ein nur noch von der Frequenz abhängiges Spektrum zu erhalten. Die Grenzen für die Integration können aus der Ungleichung (19) gewonnen werden. Man setzt nun die Werte aus den Bedingungen als Grenzen, da das Spektrum in ihrer Nähe sehr klein ist und das Integral nicht nennenswert beeinflusst wird. Integration über den Transversalimpuls ergibt unter Berücksichtigung der Zylindersymmetrie:

$$\begin{aligned} n(\omega) &\approx \int_{\frac{\hbar\omega}{\gamma^2 c}}^{\frac{E_b}{\gamma c}} \frac{\alpha}{\pi^2} \frac{k_{\perp}^2 c^4 2\pi k_{\perp} dk_{\perp}}{\left(k_{\perp}^2 c^2 + \frac{(\hbar\omega)^2}{\gamma^2} \right)^2} \frac{1}{\omega} \\ &= \int_{\frac{\omega^2}{\gamma^4}}^{\frac{E_b^2}{\gamma^2}} \frac{\alpha}{\pi} \frac{z dz}{\left(z + \frac{(\hbar\omega)^2}{\gamma^2} \right)^2} \frac{1}{\omega} \\ \text{mit } z &= k_{\perp}^2 c^2 \text{ wird} \end{aligned}$$

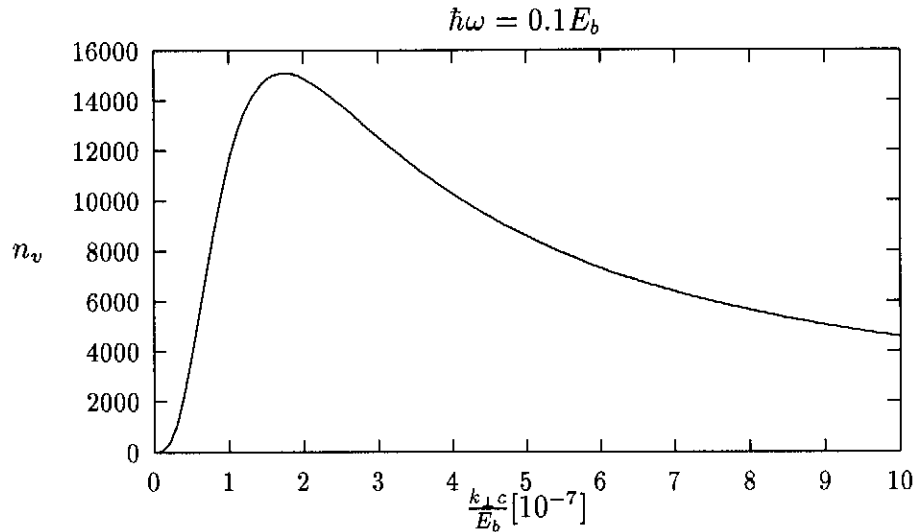


Abbildung 6: Die Verteilung des transversalen Impulses für virtuelle Photonen.

$$n(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\ln \left(z + \frac{(\hbar\omega)^2}{\gamma^2} \right) + \frac{\frac{(\hbar\omega)^2}{\gamma^2}}{z + \frac{(\hbar\omega)^2}{\gamma^2}} \right] \frac{\frac{E_b^2}{\gamma^2}}{\frac{(\hbar\omega)^2}{\gamma^4}} \frac{1}{\omega}$$

$$n(\omega)d\omega \approx \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{\omega} \ln \frac{E_b}{\hbar\omega} d\omega.$$

Den wahrscheinlichsten Wert \hat{k}_\perp erhält man aus Gleichung (20) durch Differenzieren nach k_\perp :

$$\hat{k}_\perp = \sqrt{3} \frac{\hbar\omega}{\gamma c}$$

Das Beispiel eines Spektrums ist in Abbildung 6 zu sehen; das Maximum wird für kleinere ω noch wesentlich deutlicher.

5.4 Der Breit-Wheeler-Prozeß

Von besonderem Interesse sind nicht nur der totale Wirkungsquerschnitt, sondern auch die Winkel- und Energieverteilungen der erzeugten Teilchen; diese sollen deshalb am Breit-Wheeler-Prozeß näher untersucht werden.

Den differentiellen Wirkungsquerschnitt kann man zum Beispiel [18] entnehmen; es gilt:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{8\pi r_e^2 (mc^2)^2}{s^2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{t - (mc^2)^2}{u - (mc^2)^2} + \frac{u - (mc^2)^2}{t - (mc^2)^2} \right) \right]$$

$$-\left(\frac{(mc^2)^2}{u - (mc^2)^2} + \frac{(mc^2)^2}{t - (mc^2)^2}\right) - \left(\frac{(mc^2)^2}{u - (mc^2)^2} + \frac{(mc^2)^2}{t - (mc^2)^2}\right)^2 \quad (21)$$

wobei s , t und u die Mandelstam-Variablen sind. Es ist

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2 c^2 = 4\hbar\omega_1\hbar\omega_2, \\ t &= (k_1 - p_1)^2 c^2 = -2\hbar\omega_1 E(\theta)(1 - \beta \cos \theta) + m^2 c^4, \\ u &= (k_1 - p_2)^2 c^2 = -2\hbar\omega_2 E(\theta)(1 + \beta \cos \theta) + m^2 c^4, \end{aligned}$$

Dabei ist E die Energie eines der beiden erzeugten Teilchen und θ sein Flugwinkel relativ zur Bahn des ersten Photons; ω_1 und ω_2 sind die Frequenzen der beiden Photonen.

Daraus kann man $\sigma(\omega_1, \omega_2)$ durch Integration über die Winkel gewinnen [18]:

$$\sigma(\omega_1, \omega_2) = \frac{\pi r_e^2}{2} (1 - \beta^2) \left(2\beta^3 - 4\beta + (3 - \beta^4) \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right) \quad (22)$$

βc ist die Geschwindigkeit des erzeugten Elektrons und Positrons in ihrem Schwerpunktsystem, so daß gilt:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{(mc^2)^2}{\hbar\omega_1\hbar\omega_2}}.$$

Teilchen mit einer hohen Energie im Schwerpunktsystem sind besonders interessant, weil nur sie einen nennenswerten Transversalimpuls besitzen können. Dieser aber ist eine Voraussetzung dafür, daß das Teilchen den Detektor trifft. Daher kann man sich für die folgenden Betrachtungen auf Teilchen mit $\beta \approx 1.0$ beschränken. Erweitert man dazu in Gleichung (22) den Term im Logarithmus mit $(1 + \beta)/(1 - \beta)$ und ersetzt $1/(1 - \beta^2)$ durch γ^2 , so folgt:

$$\sigma(\omega_1, \omega_2) = \frac{\pi r_e^2 (mc^2)^2}{\omega_1 \omega_2 \hbar^2} \ln \left(\frac{4\hbar\omega_1\hbar\omega_2}{(mc^2)^2} \right). \quad (23)$$

5.5 Berechnung der Wirkungsquerschnitte

Um eine Vorstellung von der relativen Bedeutung der drei Prozesse zu erhalten, sollen die Wirkungsquerschnitte und Luminositäten abgeschätzt werden. Dabei ist die Zahl der durch einen Prozeß produzierten Teilchen durch $L \langle \sigma_i \rangle$ gegeben. Zur Vereinfachung der Rechnung wird im folgenden $x_i = \hbar\omega_i/E_b$ und $\gamma = E_b/(mc^2)$ verwendet, wobei E_b die Energie der Strahlteilchen ist.

Für $\langle \sigma_{BW} \rangle$ wird das Beamstrahlungsspektrum je Strahlteilchen $n_b(x)$ benötigt. Da bekannt ist, daß für kleine x für ein Teilchen auf einer Kreisbahn $n_b(x) \propto x^{-\frac{2}{3}}$ gilt und der Wirkungsquerschnitt für kleine Produkte $x_1 x_2$ maximal ist, kann man für das Spektrum nach dem Durchlaufen des halben Bunches ansetzen:

$$n_b(x) = Ax^{-\frac{2}{3}}. \quad (24)$$

A läßt sich abschätzen, indem man das mittlere Υ aus Gleichung (12) in Gleichung (13) einsetzt und die Integration über die Zeit durchführt. Das Integral über die Besselfunktion wird anschließend genähert. Es ergibt sich mit $\Gamma(2/3) \approx 1.35$ [31]:

$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \alpha \sigma_z m c}{2\pi \gamma \hbar} (3\Upsilon)^{\frac{2}{3}}. \quad (25)$$

Für den Wirkungsquerschnitt folgt:

$$\langle \sigma_{BW} \rangle = A^2 \frac{\pi r_e^2}{\gamma^2} \int_{\frac{1}{\gamma^2}}^1 dx_1 \int_{\frac{1}{x_1 \gamma^2}}^1 dx_2 x_1^{-\frac{5}{3}} x_2^{-\frac{5}{3}} \ln(4\gamma^2 x_1 x_2). \quad (26)$$

Die unteren Grenzen der Integrale folgen dabei aus der Bedingung, daß $\hbar\omega_1 \hbar\omega_2 \geq m^2 c^4$, das heißt $x_1 x_2 \geq 1/\gamma^2$, gelten muß, um die Erzeugung eines Paares zu ermöglichen. Nach Ausführen der Integrationen können kleinere Terme vernachlässigt werden, und es ergibt sich:

$$\langle \sigma_{BW} \rangle \approx \frac{3}{2} A^2 \frac{\pi r_e^2}{\gamma^{\frac{2}{3}}} \left(\ln 4 + \frac{3}{2} \right) \ln \gamma^2.$$

Für die verschiedenen Beschleuniger ist der Parameter A sehr verschieden; er liegt allerdings in der Größenordnung 1. Setzt man $A = 1$ und $\gamma = 5 \cdot 10^5$, um einen Vergleich der Wirkungsquerschnitte zu ermöglichen, so ergibt sich $\langle \sigma_{BW} \rangle \approx 3 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$. Wie im folgenden zu sehen sein wird, ist dies deutlich weniger als $\langle \sigma_{BH} \rangle$ oder $\langle \sigma_{LL} \rangle$. Dieser Prozeß hat deshalb nur für ungünstige Winkelverteilungen eine größere Bedeutung.

Ein Mittel zur Verringerung des durch den Breit-Wheeler-Prozeß verursachten Untergrunds besteht einfach in der Reduktion der Beamstrahlung, das heißt in der Verkleinerung von A . Dies bedeutet im allgemeinen auch eine Verringerung des Luminositätserhöhungsfaktors H_D .

Der Bethe-Heitler-Prozeß unterscheidet sich von den beiden anderen dadurch, daß über zwei verschiedene Spektren integriert werden muß — er ist asymmetrisch. Dabei fällt das virtuelle Photonenspektrum $n_v(x)$ wesentlich schneller zu großen x hin ab, als das reelle: $n_v(x) \propto \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}$; $n_b(x) \propto x^{-2/3}$. Wieder ist das wahrscheinlichste Ereignis eines mit kleinem Produkt $x_1 x_2$. Wegen der Asymmetrie der Spektren erwartet man, daß normalerweise $x_1 \gg x_2$ gilt, falls ω_1 die Frequenz des Beamstrahlungsphotons ist. Die durchschnittliche Energie der erzeugten Teilchen ist höher als bei den anderen Prozessen, da sie durch die Summe $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$ bestimmt wird.

Um den Wirkungsquerschnitt zu berechnen, kann man zuerst über das virtuelle Spektrum integrieren; das Ergebnis benötigt man auch für den Landau-Lifschitz-Prozeß. Es folgt:

$$\langle \sigma_{BH} \rangle = 2A \frac{2\alpha r_e^2}{\gamma^2} \int_{\frac{1}{\gamma^2}}^1 dx_1 \int_{\frac{1}{x_1 \gamma^2}}^1 dx_2 x_1^{-\frac{2}{3}} x_1^{-1} x_2^{-2} \ln x_2^{-1} \ln(4\gamma^2 x_1 x_2)$$

$$\begin{aligned}
&\approx 2A2\alpha r_e^2 \int_{\frac{1}{\gamma^2}}^1 dx_1 x_1^{-\frac{2}{3}} \left[\ln(4\gamma^2 x_1) (\ln 4 + 1) - (\ln 4 + 2) \ln 4 - 2 \right] \\
&= 2A \int_{\frac{1}{\gamma^2}}^1 dx_1 x_1^{-\frac{2}{3}} \sigma'_{BH} \\
&\approx 12A\alpha r_e^2 \left[\ln(4\gamma^2) (\ln 4 + 1) - (\ln 4 + 5) \ln 4 - 5 \right]. \tag{27}
\end{aligned}$$

In den eckigen Klammern wurden Terme $1/(x_1\gamma^2)$ vernachlässigt, da sie nur für sehr kleine x_1 zum Integral beitragen. Der Faktor 2 ist notwendig, um beide Strahlen zu berücksichtigen, da das virtuelle Photon von einem Elektron oder einem Positron emittiert werden kann.

Der oben gewonnene Wert für σ'_{BH} ist dem aus [18] ähnlich. Dort findet man:

$$\sigma'_{BH} = \frac{28}{9} \alpha r_e^2 \ln(4\gamma^2 x_1).$$

Insbesondere die Abhängigkeit von x_1 ist also gleich. Setzt man wieder $A = 1$, so gilt $\langle \sigma_{BH} \rangle \approx 4 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$. Dieser Wert ist aber sehr ungenau, da wegen der unterschiedlichen Spektren vorzugsweise harte reelle Photonen mit weichen virtuellen reagieren. Für die harten Beamstrahlungsphotonen ist aber die Näherung des Spektrums durch $n_b(x) = Ax^{-2/3}$ schlecht. Trotzdem bleibt festzuhalten, daß der Bethe-Heitler-Prozeß den größten Wirkungsquerschnitt aller drei Prozesse hat.

Zur Verringerung des Wirkungsquerschnittes gibt es zwei Möglichkeiten. So kann wie beim Breit-Wheeler-Prozeß die Beamstrahlung vermindert werden, also A verkleinert werden. Man kann sich aber auch den weiter unten beschriebenen Effekt der geometrischen Reduktion zunutze machen. Verwendet man einen sehr flachen Strahl, so kann der Stoßparameter der virtuellen Photonen die Strahlausdehnung in y -Richtung übersteigen, dies ergibt eine Verringerung des Wirkungsquerschnittes.

Der Landau-Lifschitz-Prozeß schließlich ist von den Strahlparametern nur insoweit abhängig, als sie die Energie der Strahlteilchen beeinflussen. Der Wirkungsquerschnitt muß deshalb in allen Beschleunigern gleicher Energie nahezu gleich sein. Allerdings muß man noch die geometrische Reduktion berücksichtigen — siehe weiter unten. Der Wirkungsquerschnitt ist relativ groß und die Zahl der erzeugten Paare mit größerem Winkel zur Strahlachse ist wegen der Symmetrie ebenfalls groß. Verwendet man das Zwischenergebnis aus Gleichung (27), so ergibt sich

$$\langle \sigma_{LL} \rangle = \frac{4\alpha^2 r_e^2}{\pi} (\ln 4 + 1) \left[\frac{\ln^3 \gamma^2}{6} - \ln^2 \gamma^2 - \ln \gamma^2 \right],$$

wieder unter Vernachlässigung kleinerer Terme. Auch ergibt der Vergleich mit anderen Werten [1] ungefähre Übereinstimmung:

$$\langle \sigma_{LL} \rangle = \frac{\alpha^2 r_e^2}{\pi} \left(1.04 \ln^3 (4\gamma^2) - 6.59 \ln^2 (4\gamma^2) - 11.8 \ln (4\gamma^2) + 104 \right), \tag{28}$$

Die Ergebnisse sind also durchaus vereinbar, und wieder ist die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von γ im führenden Term gleich. Es ergibt sich $\langle\sigma_{LL}\rangle \approx 3 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$. Der Gesamtwirkungsquerschnitt dieses Prozesses liegt zwischen den anderen.

Der Wirkungsquerschnitt hängt nicht von der Beamstrahlung ab, sondern nur von der Energie der Strahlteilchen. Die Zahl der erzeugten Paare ist damit direkt proportional zur e^+e^- -Luminosität. Ohne Luminositätseinbuße kann die Paar-Rate nur durch Verwenden eines flachen Strahls leicht verringert werden.

5.6 Winkelverteilung der Teilchen aus der Paarerzeugung

Im folgenden soll eine grobe Näherung für die Winkel- und Transversalimpulsabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte gefunden werden. Der beschriebene Weg beruht auf einer Idee von ZOLOTAREV et al. und wurde von CHEN et al. beschrieben [31] und [6].

Zuerst wird der Winkel eines der erzeugten Teilchen als Funktion seiner Energie und der Energien der beiden Photonen⁷ bestimmt. Dazu wird die Viererimpulserhaltung ausgenutzt. Bezeichnet man die Energie des ersten Teilchens mit E , so gilt:

$$p_2c = k_1c + k_2c - p_1c = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 - E \\ \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 - \beta \cos \theta E \\ -\beta \sin \theta E \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Nun gilt $(p_2)^2 = (mc)^2$ und folglich

$$m^2c^4 = (\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 - E)^2 - (\hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 - \beta \cos \theta E)^2 - (\beta \sin \theta E)^2 \quad (30)$$

Hieraus ergibt sich

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta} \frac{\hbar\omega_1(E - \hbar\omega_2) + \hbar\omega_2(E - \hbar\omega_1)}{E(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_2)} \quad (31)$$

Mit diesem Ergebnis ist es möglich, den differentiellen Wirkungsquerschnitt als Funktion der Photonenenergien und des Winkels eines der beiden Paarteilchen zur Strahlachse zu schreiben.

Gesucht ist $\sigma(\cos \theta, p_\perp)$, der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines Teilchens mit einem Transversalimpuls größer als p_\perp und einem Winkel zur Strahlachse zwischen θ und $(\pi - \theta)$. Die Gesamtzahl der Paare ergibt sich aus $L\sigma(\cos \theta, p_\perp)$.

⁷Im folgenden wird immer nur ein Teilchen aus jedem Paar, beispielsweise das Positron, berücksichtigt.

Bei dem Bethe-Heitler-Prozeß wird der Faktor 2 für $e^+\gamma$ und $e^-\gamma$ in den Wirkungsquerschnitt einbezogen.

Zuerst kann man die Bedingungen an die beiden Photonen ermitteln. Dazu dienen die Hilfsgrößen

$$x_{\pm} = \frac{p_{\perp} c}{2E_b} \sqrt{\frac{1 \pm \cos \theta}{1 \mp \cos \theta}}.$$

Sind die Energie und der Winkel eines der beiden Photonen vorgegeben, so erhält man aus der Bedingung für den Transversalimpuls

$$E \sin \theta \geq p_{\perp} c$$

durch Einsetzen in Gleichung (31)

$$x_1 \geq \frac{x_2 x_+}{x_2 - x_-} = x_m. \quad (32)$$

Es ergibt sich als allgemeiner Ansatz

$$\sigma(\cos \theta_0, p_{\perp}) = \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} d \cos \theta \int_{x_-}^{\infty} dx_2 \int_{x_m}^{\infty} dx_1 n_x(x_1) n_y(x_2) \sigma(x_1, x_2, \cos \theta),$$

wobei als obere Grenzen nicht die Strahlenergie (also 1), sondern ∞ gewählt wird, da die Integrale ihren Wert dadurch praktisch nicht ändern, aber leichter berechenbar sind. Die untere Grenze für das Integral über x_2 ist dann leicht dadurch zu erhalten, daß man in Gleichung (32) x_1 gegen unendlich gehen läßt.

Da vor allem Teilchen mit höherem Transversalimpuls und größerem Winkel wichtig sind, kann in Gleichung (31) $\beta = 1$ gesetzt werden. Um $\sigma(x_1, x_2, \cos \theta)$ zu berechnen, kann nach $E(\theta)$ aufgelöst werden:

$$E(\theta) = \frac{2\hbar\omega_1\hbar\omega_2}{\hbar\omega_1(1 - \cos \theta) + \hbar\omega_2(1 + \cos \theta)}. \quad (33)$$

Dies wird in Gleichung (21) eingesetzt. Weiter wird benötigt:

$$\frac{dt}{d \cos \theta} = 2E^2$$

und

$$\frac{1}{s^2} \frac{dt}{d \cos \theta} = \frac{1}{2[\hbar\omega_1(1 - \cos \theta) + \hbar\omega_2(1 + \cos \theta)]^2}.$$

Insgesamt ergibt sich⁸:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{8\pi r_e^2}{2\gamma^2 [x_1(1 - \cos \theta) + x_2(1 + \cos \theta)]^2} \left[\frac{1}{4} \frac{x_1^2(1 - \cos \theta)^2 + x_2^2(1 + \cos \theta)^2}{x_1 x_2 (1 - \cos^2 \theta)} \right]$$

⁸In [6] und [31] kommen die Autoren zu einem anderen Ergebnis. Da sie vermutlich in der Ableitung $dt/d \cos \theta$ nicht die Abhängigkeit der Energie E von dem Winkel berücksichtigt haben, erhalten sie in Gleichung (34) einen zusätzlichen Faktor $[x_1(1 - \cos \theta) + x_2(1 + \cos \theta)] / [2x_2]$, den sie mit der Behauptung, er sei ungefähr 1, zu entfernen suchen. Sie erhalten daher das gleiche Endergebnis.

$$+ \frac{x_1(1 - \cos \theta) + x_2(1 + \cos \theta)}{2\gamma^2 x_1 x_2 (1 - \cos^2 \theta)} - \left(\frac{x_1(1 - \cos \theta) + x_2(1 + \cos \theta)}{2\gamma^2 x_1 x_2 (1 - \cos^2 \theta)} \right)^2 \Big]. \quad (34)$$

Der erste Term ist entscheidend:

$$\frac{d\sigma(x_1, x_2)}{d \cos \theta} \approx \frac{\pi r_e^2}{\gamma^2 x_1 x_2 (1 - \cos^2 \theta)} \left[\frac{x_1^2(1 - \cos \theta)^2 + x_2^2(1 + \cos \theta)}{[x_1(1 - \cos \theta) + x_2(1 + \cos \theta)]^2} \right]. \quad (35)$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, variiert der Faktor in den Klammern zwischen 0.5 und 1. Er wird daher durch 1 ersetzt, um eine obere Abschätzung zu erhalten.

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} \approx \frac{\pi r_e^2}{\gamma^2 x_1 x_2 (1 - \cos^2 \theta)} \quad (36)$$

Im folgenden wird $n_b(x) = A \cdot x^{-\frac{2}{3}}$ und $n_v(x) = 2\alpha/\pi \cdot x^{-1} \ln(x^{-1})$, sowie $\sigma_{\gamma\gamma}(x_1, x_2, \cos \theta) = \pi r_e^2/\gamma^2 \cdot x_1^{-1} x_2^{-1}/(1 - \cos^2 \theta)$ verwendet.

Zunächst kann man exakt die Integrale über x_1 und x_2 berechnen:

$$\begin{aligned} \sigma_{BW} &= \frac{\pi r_e^2 A^2}{\gamma^2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \int_{x_-}^{\infty} dx_2 \int_{x_b}^{\infty} dx_1 x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{x_1 x_2} \\ &= \frac{\pi r_e^2 A^2}{\gamma^2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \int_{x_-}^{\infty} dx_2 \int_{x_b}^{\infty} dx_1 x_1^{-\frac{5}{3}} x_2^{-\frac{5}{3}} \\ &= \frac{\pi r_e^2 A^2}{\gamma^2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \int_{x_-}^{\infty} dx_2 \left[x_2^{-\frac{5}{3}} \frac{3}{2} x_1^{-\frac{2}{3}} \right]_{\frac{x_2 x_+}{x_2 - x_-}}^{\infty} \\ &= \frac{\pi r_e^2 A^2}{\gamma^2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \int_{x_-}^{\infty} dx_2 \frac{3}{2} x_2^{-\frac{7}{3}} x_+^{-\frac{2}{3}} (x_2 - x_-)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{\pi r_e^2 A^2}{\gamma^2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \left[x_+^{-\frac{2}{3}} \frac{3}{2} x_2^{-\frac{2}{3}} B\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \right]_{x_-}^{\infty} \\ &= \frac{\pi r_e^2 A^2}{\gamma^2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} (x_+ x_-)^{-\frac{2}{3}} \frac{3}{2} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{7}{3})} \\ \sigma_{BH} &= -\frac{4\alpha r_e^2 A}{\gamma^2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \int_{x_-}^{\infty} dx_2 \int_{x_b}^{\infty} dx_1 x_2^{-2} \ln x_2 x_1^{-\frac{5}{3}} \\ &= -\frac{4\alpha r_e^2 A}{\gamma^2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \int_{x_-}^{\infty} dx_2 \frac{3}{2} x_2^{-\frac{8}{3}} x_+^{-\frac{2}{3}} (x_2 - x_-)^{\frac{2}{3}} \ln x_2 \\ &= -\frac{4\alpha r_e^2 A}{\gamma^2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \left[\frac{3}{2} x_+^{-\frac{2}{3}} x_2^{-1} B\left(1, \frac{5}{3}\right) \ln x_2 \left(\ln x_2 + \Psi\left(\frac{8}{3}\right) - \Psi(1) \right) \right]_{x_-}^{\infty} \\ &= \frac{6\alpha r_e^2 A}{\gamma^2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} x_+^{-\frac{2}{3}} x_-^{-1} B\left(1, \frac{5}{3}\right) \left(\ln x_- + \Psi\left(\frac{8}{3}\right) - \Psi(1) \right) \\ \sigma_{LL} &= \frac{4\alpha^2 r_e^2}{\pi \gamma^2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \int_{x_-}^{\infty} dx_2 \int_{x_b}^{\infty} dx_1 \frac{\ln x_1 \ln x_2}{x_1^2 x_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\alpha^2 r_e^2}{\pi\gamma^2} \int_{-\cos\theta_0}^{\cos\theta_0} \frac{d\cos\theta}{1-\cos^2\theta} \int_{x_-}^{\infty} dx_2 \left[\ln \frac{x_2 x_+}{x_2 - x_-} + 1 \right] \frac{x_2 - x_- \ln x_2}{x_2 x_+ x_2^2} \\
&= \frac{4\alpha^2 r_e^2}{\pi\gamma^2} \int_{-\cos\theta_0}^{\cos\theta_0} \frac{d\cos\theta}{1-\cos^2\theta} \int_{x_-}^{\infty} dx_2 (\ln x_+ + 1) \left(\frac{\ln x_2}{x_2^2 x_+} - \frac{x_- \ln x_2}{x_2^3 x_+} \right) \\
&\quad \frac{4\alpha^2 r_e^2}{\pi\gamma^2} + \int_{x_-}^{\infty} dx_2 \ln \frac{x_2}{x_2 - x_-} \frac{x_2 - x_- \ln x_2}{x_2 x_+ x_2^2} \\
&= \frac{4\alpha^2 r_e^2}{\pi\gamma^2} \int_{-\cos\theta_0}^{\cos\theta_0} \frac{d\cos\theta}{1-\cos^2\theta} \frac{\ln x_+ + 1}{x_+} \left(\frac{\ln x_-}{x_-} + \frac{1}{x_-} - \frac{\ln x_-}{2x_-} - \frac{1}{4x_-} \right) \\
&\quad + \frac{4\alpha^2 r_e^2}{\pi\gamma^2} \frac{1}{x_- x_+} \int_1^{\infty} dz \ln \frac{z}{z-1} \frac{z-1}{z^3} (\ln z + \ln x_-) \\
&= \frac{4\alpha^2 r_e^2}{\pi\gamma^2} \int_{-\cos\theta_0}^{\cos\theta_0} \frac{d\cos\theta}{1-\cos^2\theta} \frac{1}{x_+ x_-} \left[\frac{\ln x_- \ln x_+}{2} + \frac{3 \ln(x_- x_+)}{4} + 0.93 \right]
\end{aligned}$$

Hier wurde die Betafunktion $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ benutzt, es gilt $B(2/3, 5/3) \approx 1.027$, $\Psi(8/3) \approx 0.782$ sowie $\Psi(1) \approx 0.577$. Die Autoren in [31] und [6] erhalten für $\langle\sigma_{LL}\rangle$ in der eckigen Klammer 2.22 statt 0.93. Zur Berechnung dieses Wertes ist die Lösung eines bestimmten Integrales erforderlich, das sie möglicherweise analytisch gelöst haben. Ich habe es mit mehreren Programmen numerisch gelöst, mit jeweils sehr ähnlichen Ergebnissen.

Die Integration über $\cos\theta$ erfordert für die letzten beiden Prozesse eine weitere Näherung; so muß man x_- beziehungsweise x_+ in den Logarithmen als konstant annehmen. Weiter ersetzt man $\sqrt{(1-\cos\theta_0)/(1+\cos\theta_0)}$ durch $\tau = \tan(\theta_0/2)$. Es folgt

$$\langle\sigma_{BW}(p_{\perp}, \theta)\rangle \approx \frac{3\pi r_e^2 A^2}{\gamma^2} B\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \left(\frac{p_{\perp} c}{2E_b}\right)^{-\frac{4}{3}} \ln \frac{1}{\tau} \quad (37)$$

$$\langle\sigma_{BH}(p_{\perp}, \theta)\rangle \approx \frac{108\alpha r_e^2 A}{5\gamma^2} \left(\frac{p_{\perp} c}{2E_b}\right)^{-\frac{5}{3}} (\tau^{\frac{1}{3}} - \tau^{-\frac{1}{3}}) \left(\ln \frac{p_{\perp} c \tau}{2E_b} + \Psi\left(\frac{8}{3}\right) - \Psi(1)\right) \quad (38)$$

$$\langle\sigma_{LL}(p_{\perp}, \theta)\rangle \approx \frac{4\alpha^2 r_e^2}{\pi\gamma^2} \left(\frac{p_{\perp} c}{2E_b}\right)^{-2} \ln \frac{1}{\tau} \left[\ln \frac{p_{\perp} c}{2E_b \tau} \ln \frac{p_{\perp} c \tau}{2E_b} + 3 \ln \frac{p_{\perp} c}{2E_b} + 1.86 \right] \quad (39)$$

In Abbildung 7 ist der Verlauf dieser Wirkungsquerschnitte, multipliziert mit einer Luminosität $L = 10^{30} \text{cm}^2$, für $A = 1$ zu sehen.

5.7 Geometrische Reduktion

Die virtuellen Photonen bilden eine Wolke um das Elektron, wobei ihr durchschnittlicher Abstand zu ihm durch

$$b = \frac{\hbar}{k_{\perp}} \quad (40)$$

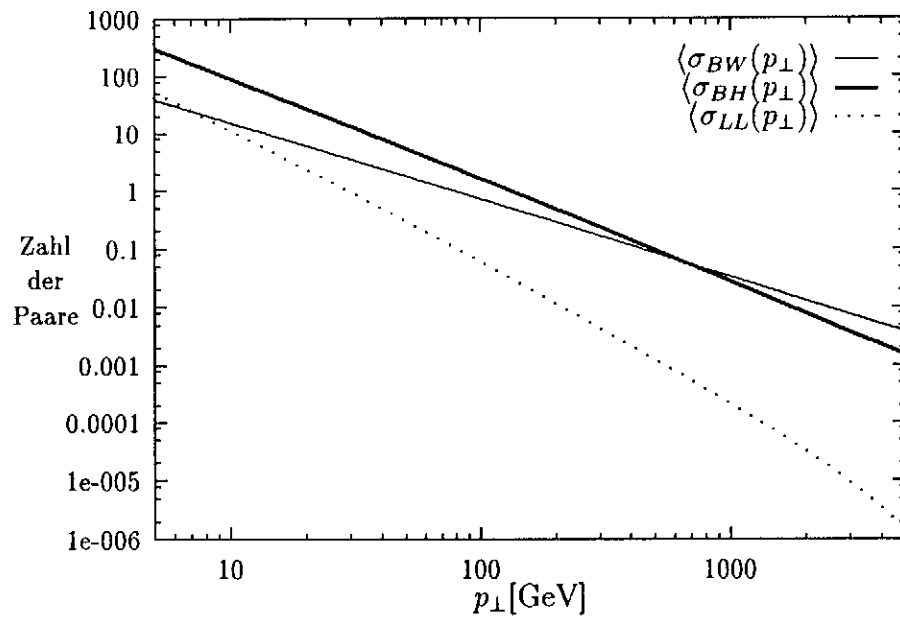


Abbildung 7: Theoretische berechnete Anzahl der Paarelektronen mit einem Transversalimpuls $p_t \geq p_{\perp}$ als Funktion von p_{\perp} . Zugrundegelegt ist ein Beschleuniger mit einer Luminosität $L = 10^{30} \text{cm}^2$ je Strahl-Strahl-Kreuzung, $E_b = 250 \text{GeV}$ und $A = 1$.

gegeben ist. Bei einem sehr flachen Strahl kann es vorkommen, daß sich ein Photon außerhalb desselben befindet. Dadurch wird der effektive Wirkungsquerschnitt verringert. Setzt man für k_{\perp} den wahrscheinlichsten Transversalimpuls $\hat{k}_{\perp} = \sqrt{3}\omega\hbar/\gamma c$ in Gleichung (40) ein, so folgt:

$$\hat{b} = \frac{\hbar c}{\sqrt{3}\hbar\omega}\gamma$$

und mit $x = \hbar\omega/E_b$

$$\hat{b} = \frac{\hbar}{\sqrt{3}xmc}$$

Mit zunehmendem \hat{b} wird der Wirkungsquerschnitt kleiner. Davon ist der Gesamtwirkungsquerschnitt des Bethe-Heitler-Prozesses, zu dem vor allem Stöße von sehr weichen virtuellen mit sehr harten reellen Photonen beitragen, besonders stark betroffen.

6 Simulation der Paarerzeugung

Um die Paarerzeugung zu simulieren, wird ein Ereignisgenerator benötigt. Seine Aufgabe ist es, entsprechend der realen Wahrscheinlichkeitsverteilung Paare mit ihren Anfangskoordinaten (Ort und Geschwindigkeit) zu erzeugen. Dazu läßt sich eine abgewandelte Monte-Carlo-Integrationsroutine verwenden. Die so produzierten Teilchen müssen anschließend durch die Felder beider Bunche verfolgt werden. Dazu ist eine Erweiterung der in Abschnitt 3 genannten Methoden notwendig.

6.1 Adaptive Monte-Carlo-Integration

Die in einer Dimension üblichen numerischen Integrationsverfahren wie Romberg- oder Gaussverfahren sind für mehrdimensionale Integrale weniger geeignet. Läßt sich ein Integral der Form

$$I = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, \dots, x_n)$$

nicht faktorisieren, so wächst der Zeitaufwand zur Lösung exponentiell mit der Zahl der Dimensionen, da die Integrationsroutine rekursiv aufgerufen werden muß.

Als Lösung bietet sich die Monte-Carlo-Integration an. In ihrer einfachsten Form wird eine Zahl von Punkten innerhalb des Integrationsvolumens V zufällig ausgewählt und man erhält das Integral näherungsweise durch:

$$I = \langle f(\vec{x}_i) \rangle V.$$

Die Punkte werden dabei meistens mit einem Pseudozufallsgenerator erzeugt. Etwas subtiler ist die Verwendung einer nicht gleichverteilten Zufallsgröße. Erzeugt etwa der Generator den Punkt \vec{x} mit der Wahrscheinlichkeit $p(\vec{x})$, so gilt:

$$I = \left\langle \frac{f(\vec{x}_i)}{p(\vec{x}_i)} \right\rangle.$$

Zur Abschätzung der Genauigkeit läßt sich die Größe

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^m [f(\vec{x}_i)w(\vec{x}_i)]^2 - I^2}$$

verwenden. $w(\vec{x}_i)$ ist dabei $1/[p(\vec{x}_i)m]$, mit m als der Anzahl der Aufrufe.

Durch geschickte Wahl von p kann nun die Genauigkeit der Integration, beziehungsweise die Geschwindigkeit der Konvergenz erhöht werden. Am geeignetsten ist $p(\vec{x}) = |f(\vec{x})|$, aber zur Erzeugung einer derartig verteilten Zufallsgröße muß das Integral über den Betrag von f gelöst werden können, eine Aufgabe, die keine Verbesserung zur vorhergehenden bringt. In vielen Fällen lassen sich jedoch

leicht integrierbare Funktionen p finden, die dem Verlauf von $|f|$ gut entsprechen und somit eine schnellere Konvergenz ermöglichen. Als Ansatz für eine beliebige Funktion kann auch eine Treppenfunktion benutzt werden. Ein Verfahren mit steter Anpassung der Gewichtsfunktion w an $|f|$ ist eine adaptive Monte-Carlo-Integration.

Das Monte-Carlo-Verfahren teilt mit den eindimensionalen Methoden die Gefahr, daß ein interessanter Bereich übersehen wird, wenn die Funktion hinreichend pathologisch ist. In einer Dimension ist es den anderen Verfahren unterlegen, vor allem, da die erzielbare Genauigkeit begrenzt ist (zum Beispiel schon durch die Verteilung der Zufallszahlen). Jedoch erfordern mehrdimensionale Integrale hierbei nur linear vergrößerten Aufwand, und da sich bei den anderen Verfahren hier die Fehler durch die Rekursion akkumulieren, schneidet es sogar bei der Genauigkeit nicht schlechter ab.

Ein weiterer Vorteil dieser Methode ist, daß die Produkte $f(\vec{x}_i)w(\vec{x}_i)$ sich einem konstanten Wert nähern, oder doch zumindest weit weniger von einander verschieden sind als ohne Adaption. Ist $f(\vec{x}_i)w(\vec{x}_i)$ annähernd konstant, so kann man leicht einen Ereignisgenerator entwerfen. Durch die adaptive Integration erzeugt man die entsprechenden Gewichte, dann bestimmt man aus Luminosität und Wirkungsquerschnitt die Anzahl der Ereignisse. Entsprechend oft ruft man den Generator auf, der mit einer den Gewichten entsprechenden Wahrscheinlichkeit einen Punkt aus dem Integrationsraum auswählt, also ein Ereignis erzeugt.

Eine etwas andere Methode erzeugt die Ereignisse während der Integration. Auch hierbei werden zuerst die Gewichte durch Adaption bestimmt, anschließend wird weiter integriert. Aus dem Wirkungsquerschnitt, dem Gewicht und der Luminosität wird für jeden einzelnen Funktionsaufruf die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis mit diesen Parametern eintritt, berechnet und dementsprechend ein Paar erzeugt oder auch nicht. Gegebenfalls werden mehrere Paare erzeugt.

6.2 Zufallszahlen

Da die Zufallsgrößen γ , wie sie innerhalb der Monte-Carlo-Integration verwendet werden, durch eine deterministische Maschine nicht wirklich zufällig, das heißt nichtdeterministisch, erzeugt werden können, müssen sie durch eine Folge von Pseudozufallszahlen ersetzt werden. Diese liefert ein nach einem Algorithmus arbeitender Zufallszahlengenerator, wobei die erzeugten Zahlen im allgemeinen im Intervall $[0; 1[$ gleichverteilt sind und andere Verteilungen hieraus erzeugt werden. Die Forderungen an diese Folge sind zuerst, daß die Werte tatsächlich gleichverteilt sind, und das nicht nur für die γ_i im Intervall $[0; 1[$, sondern auch für alle n -Tupel $(\gamma_{kn+1}, \dots, \gamma_{(k+1)n})$, in den entsprechenden Hyperwürfeln. Die Werte müssen außerdem fein genug verteilt sein, was bedeutet, daß die Wertemenge groß sein muß. Da es nach dem Satz von KÖNIG stets eine periodische Teilfolge der γ_i gibt, eine reale Zufallsgröße aber nicht periodisch ist, fordern wir, daß die Periodenlänge möglichst groß ist.

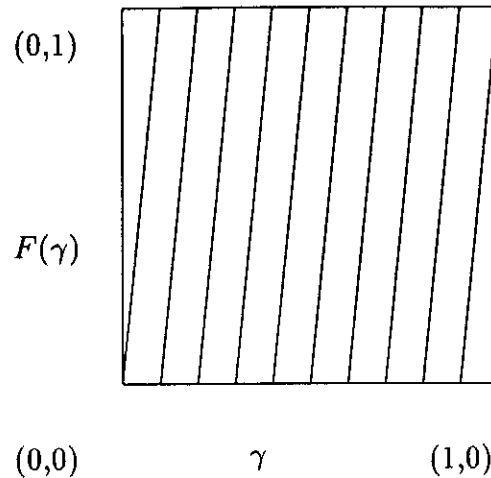


Abbildung 8: Die Funktion $F = \text{FRAC}(g\gamma)$ füllt die Fläche recht gut aus.

Im einfachsten Fall benutzt man eine Funktion F mit $\gamma_{n+1} = F(\gamma_n)$. Die Wahl eines geeigneten F ist nicht einfach. Die Forderung der Gleichverteilung der 2-Tupel $(\gamma_{2n+1}, \gamma_{2(n+1)})$ wird durch eine Funktion $F(\gamma) = \text{FRAC}(g\gamma)$ erfüllt, FRAC liefert dabei den Nachkommanteil des Arguments. Die 2-Tupel dieser Funktion sind recht gut verteilt, siehe Abbildung 8 in der ein sehr kleines g ($g = 10$, normalerweise ist $g \gg 1000$) gewählt wurde. Dies führt zu dem häufig verwendeten Kongruenzverfahren. Dazu werden zwei natürliche Zahlen m_1 und m_2 benötigt, oft sind Primzahlen günstig. Aus diesen kann die Folge $l_{n+1} = m_1 l_n \pmod{m_2}$ konstruiert werden und daraus $\gamma_n = \frac{l_n}{m_2}$.

Hier sieht man leicht, daß die Folge in eine periodische Teilfolge übergeht, da die Zahl der möglichen Werte begrenzt ist, und aus jedem Wert eindeutig der nächste folgt. Die Periodenlänge ist maximal m_2 , in der Praxis ist sie meist viel kürzer. Durch geeignete Wahl der Parameter kann man versuchen, die Verteilung zu optimieren, allerdings ist der Erfolg meist ungewiß. So empfahl IBM beispielsweise früher $m_1 = 65539$ und $m_2 = 2^{31}$; diese Werte⁹ sind ungünstig, siehe hierzu [22] und [27], die beide ausdrücklich warnen.

Bei anderen Generatoren geht der Zustand z des Generators in die Zufallsgröße ein: $\gamma_{n+1} = F(z, \gamma_n)$. Dadurch kann die Periode verlängert werden. Ein Beispiel ist eine der in TRACKIT verwendeten Routinen RAN1 aus [22]. Sie benutzt drei Kongruenzgeneratoren. Einer wählt aus einer Tabelle von Zufallsgrößen einen Eintrag aus, die anderen beiden ersetzen diesen Eintrag. Da sie keine Be-

⁹Die erwähnte Methode zur Zufallszahlenerzeugung in ABEL verwendet ebenfalls $m_2 = 2^{31}$, allerdings sonst ein anderes Verfahren. Ohne Überprüfung auf Überschreitung des Zahlenbereichs wird in 32-Bit-Rechnern implizit modulo 2^{31} gerechnet, allerdings schreibt der Fortranstandard nicht vor, ob eine solche Überprüfung vorgenommen werden muß, und falls sie vorhanden ist, ob sie abschaltbar sein muß.

reichsüberschreitung verursacht, ist sie auf jedem Rechner lauffähig und ihre Ergebnisse sind rechnerunabhängig.

6.3 Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Da die erzeugten Teilchen leider das für die Berechnung des Pincheffektes notwendige Gitter schnell verlassen, muß es erweitert werden. Dabei ist die schlichte Vergrößerung der Zellenzahl jedoch unbrauchbar, insbesondere bei sehr flachen Strahlen. Außerhalb einer Entfernung von einigen σ_x zur Strahlachse, kann man die Felder dadurch nähern, daß man den Strahl durch eine Linienladungsdichte ersetzt. Die notwendige Ausdehnung des Gitters in y -Richtung erfordert also mindestens $(\sigma_x/\sigma_y)n_y$ Zellen.

Da sich ein variables Gitter, bei dem die Zellengröße von innen nach außen wächst, bei Tests nicht bewährt hat, verwende ich mehrere Gitter mit gleicher Zellenzahl, aber unterschiedlicher Seitenlänge. Dabei wird zuerst in Zwischenschritten die y -Achse gedehnt, bis sich ein quadratisches Gitter ergibt, anschließend beide Achsen zusammen. Die Ladung der Zellen des innersten Gitters wird dabei entsprechend der gemeinsamen Fläche auf die des jeweiligen äußeren verteilt. Für diese wird wieder eine homogene Verteilung angenommen.

Mit einem Testprogramm wurden die Ergebnisse für die Feldstärken dieses Verfahrens mit denen der einfachen Summation verglichen. Dazu wurde das Gitter mit verschiedenen Ladungsverteilungen, darunter auch dem schwierigen Fall einer zufälligen¹⁰, gefüllt. An einigen tausend zufällig gewählten Punkten wurde nun eine exakte Integration nach Gleichung (15) durchgeführt. Die Werte wurden dann noch einmal mit Interpolation aus den an den Zellmittelpunkten bestimmten Potentialen berechnet. Die Abweichungen waren gering, praktisch immer kleiner als ein Prozent, in seltenen Fällen auch einmal fünf Prozent. Innerhalb des Ladungsgitters allerdings ist die numerische Stabilität der direkten Summation durch Auslöschung sicherer Stellen¹¹ beim Ergebnis der Summation so schlecht, daß die Werte praktisch unbrauchbar sind.

¹⁰Dieser Fall ist besonders schwierig, da die Verteilung durch eine Fouriersumme viel schlechter angenähert werden kann, als es bei einer glatten Verteilung möglich ist.

¹¹Bei der Verwendung numerischer Verfahren ist die Rechengenauigkeit nicht nur durch die Länge der Mantisse des verwendeten Zahlentyps beschränkt, sondern in noch viel stärkerem Maße durch die verwendeten Algorithmen. Als sichere Stellen werden die Stellen der Mantisse einer Variablen bezeichnet, die noch zuverlässig richtige Werte enthalten. Durch die Subtraktion zweier sehr ähnlicher Größen kann, wie im vorliegenden Fall, diese sichere Stellenanzahl deutlich verringert werden. Subtrahiert man eine Größe mit n sicheren Stellen von einer anderen mit ebenfalls n sicheren Stellen und sind bei beiden die ersten m Stellen gleich, so hat das Resultat nur noch $n - m$ sichere Stellen.

6.4 Integration der Bewegungsgleichungen

Während die Integration der Bewegungsgleichungen für die Simulation des Pinch-effektes einfach ist, da die Teilchen aufgrund ihrer hohen Energie eine nur geringe transversale Beschleunigung erfahren und die elektrische sowie die magnetische Kraft praktisch in die gleiche Richtung wirken, ist dies für das Verfolgen der erzeugten Teilchen erheblich aufwendiger. Diese haben zum Teil große Winkel zur Strahlachse und Energien, die um bis zu 10^5 mal kleiner sein können als die der Strahlteilchen.

Da aber die Berechnung der Kräfte mit etlichen Näherungen verbunden ist — die Ladungsverteilung wird durch Makroteilchen genähert, die von diesen erzeugten Felder durch die Fouriertransformation und die Kräfte schließlich durch Interpolation — sollte das gewählte Verfahren keine zu hohe Genauigkeit haben. Die üblichen Verfahren zu Lösung von Differentialgleichungen scheiden daher aus. Es empfiehlt sich das *leap-frog*-Verfahren, dessen Name ‘Hüpfender Frosch’ die Methode bereits gut charakterisiert. Für eine nur ortsabhängige Kraft verwendet man dabei:

$$\vec{x}(t + \Delta t) = \vec{x}(t) + \vec{v}\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) \Delta t \quad (42)$$

$$\vec{v}\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) = \vec{v}\left(t - \frac{1}{2}\Delta t\right) + \vec{a}(x(t)) \Delta t \quad (43)$$

Dieses Verfahren ist relativ genau, da $v(t+\Delta t)$ eine gute Näherung für die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t - \frac{1}{2}\Delta t; t + \frac{1}{2}\Delta t]$ ist. Entsprechendes gilt für $\vec{a}(x(t))$. Existiert noch ein Magnetfeld, so wird das Verfahren etwas komplizierter, die neuen Geschwindigkeiten müssen nun in drei Schritten berechnet werden.

$$\begin{aligned} \vec{x}(t + \Delta t) &= \vec{x}(t) + \vec{v}\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) \Delta t \\ \vec{v}\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) &= \vec{v}_2 + \vec{a}_E(x(t)) \frac{1}{2}\Delta t \\ \vec{v}_2 &= A_B(\vec{x}(t), \vec{v}_1) \vec{v}_1 \\ \vec{v}_1 &= \vec{v}\left(t - \frac{1}{2}\Delta t\right) + \frac{1}{2}\vec{a}_E(\vec{x}(t))\Delta t \end{aligned}$$

Dabei ist A_B die Rotation der Geschwindigkeit durch das Magnetfeld. Da im Falle der Paarerzeugung in TRACKIT Geschwindigkeit und Ort eines Teilchens gleichzeitig bekannt sind, ist ein erster halber Schritt notwendig.

Der Winkel θ , um den der Geschwindigkeitsvektor eines Teilchens bei der Spurverfolgung durch das Magnetfeld gedreht wird, ist zugleich ein gutes Maß für die Genauigkeit dieser Berechnungen. Es ist möglich, mit vertretbarem Rechenaufwand θ kleiner als 0.1rad zu halten.

7 Aufbau von TRACKIT

Die Ergebnisse einer Simulation hängen nicht nur von der Wahl der physikalischen Modelle, sondern auch von den mathematischen Methoden und ihrer Realisation ab. Es müssen daher beide Aspekte berücksichtigt werden, im vorliegenden Falle umso mehr, als es keine experimentellen Vergleichsdaten gibt.

Im folgenden Abschnitt wird nicht nur der Aufbau von TRACKIT beschrieben, sondern es werden auch Hinweise auf Besonderheiten und Schwierigkeiten der Benutzung gegeben.

7.1 Überblick

Eine Erweiterung von MACPAR um die Simulation der Paarproduktion und die Spurverfolgung dieser Paare wäre zwar möglich, aber mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. So benötigen sowohl MACPAR als auch die Erweiterung sehr viel Speicher und im übrigen wäre das Gesamtprogramm sehr unübersichtlich. Daher wurde TRACKIT als separates Programm entwickelt. Es benutzt die Daten, die MACPAR nach den erwähnten Änderungen in einer Datei speichert, zur Bestimmung der Paarproduktion.

TRACKIT ist in Fortran 77 geschrieben. In der Initialisierungsphase werden die Parameter des Beschleunigers und der Simulation gelesen. Im Hauptteil werden dann für jeden Zeitschritt die von MACPAR berechneten Elektronen- und Photonendichten geladen¹². Aus diesen Dichten wird in drei Routinen jeweils der Wirkungsquerschnitt für jeden der drei inkohärenten Paarerzeugungsprozesse ermittelt. Dabei werden die entsprechenden Paare erzeugt und aus jedem ein Teilchen gespeichert. Auf diese Weise können bei gleichem Rechenaufwand doppelt so viele Paare berücksichtigt werden. In einer weiteren Routine werden diese, zusammen mit allen bereits vorhandenen, einen Zeitschritt lang verfolgt. Die Koordinaten bei der Entstehung sowie die nach der Spurverfolgung werden in Dateien gespeichert. Auch weitere Ergebnisse wie die Wirkungsquerschnitte, ihre Standardabweichung, die Zahl der erzeugten Teilchen, die Luminositäten und das Photonenspektrum jedes Zeitschritts werden gespeichert.

Auf diese Weise sind andere Fragestellungen leicht zu beantworten, indem eigene Auswertungsprogramme geschrieben werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurden die (graphischen) Auswertungen von Programmen vorgenommen, die das Graphiksystem GKS und das Programm GNUPLOT verwenden.

Bei einer möglichen Übertragung auf einen anderen Rechner kann außerdem der große Aufwand der Anpassung an das andere Graphiksystem entfallen.

Die Laufzeit von MACPAR und TRACKIT mit einem Parametersatz von $n_x = 30$, $n_y = 60$, $n_z = 50$ und $n_t = 30$ sowie rund 10^5 entstandenen Teilchen beträgt

¹²In einem Zeitschritt werden die beiden Strahlen um jeweils eine halbe Zellenlänge in z -Richtung bewegt.

zusammen etwa 30 Stunden auf einer VAX 4000¹³. Etwas mehr als die Hälfte der Zeit entfällt auf MACPAR, der andere Teil auf TRACKIT. Eine Vergrößerung der Zellenzahl durch Erhöhung von n_x oder n_y führt zu einer vergleichsweise geringen Steigerung der Laufzeit in TRACKIT.

7.2 Parameter

Zu unterscheiden sind die physikalischen Parameter, die aus der Problemstellung resultieren, und die numerischen Parameter, die nur die Genauigkeit der Simulation beeinflussen. Dabei ist eine möglichst weitgehende Unabhängigkeit von den letzteren erwünscht, aber schwer zu erreichen. Über die geeignete Wahl der Simulationsparameter ist in den folgenden Abschnitten 7.3 bis 7.7 mehr zu finden. Sie erfordert gewöhnlich Kenntnis des Algorithmus und seiner Implementation.

TRACKIT benötigt drei Eingabedateien. Zum ersten eine Parameterdatei für MACPAR, zum zweiten eine von MACPAR mit diesen Parametern erzeugte Binärdatei und zum dritten eine Datei mit speziellen Simulationsparametern für die Paarerzeugung. Ihr genauer Aufbau ist im Anhang beschrieben. Ist außerdem noch eine Datei RANDOM.BIN vorhanden, so verwendet TRACKIT sie zur Initialisierung seiner Zufallszahlengeneratoren. Am Programmende wird die Datei mit den aktuellen Zuständen der Generatoren neu erzeugt. So ist es möglich, mit mehreren Programmläufen eine bessere Statistik zu erzielen.

Die wichtigsten Einstellmöglichkeiten für MACPAR sind neben den physikalischen Parametern die Anzahl der Makroteilchen, die 20000 nicht unterschreiten sollte, sowie die Zellenzahl des Gitters. Mit Rücksicht auf TRACKIT sollte die Anzahl der Zellen in jeder Richtung knapp unterhalb einer Zweierpotenz ausgewählt werden¹⁴. In TRACKIT können alle drei Paarerzeugungsprozesse einzeln an- oder abgeschaltet werden, ebenso die Berücksichtigung der geometrischen Reduktion oder die Verfolgung der Teilchen durch den Strahl. Mit der Konstanten SCAL kann man die Zahl der simulierten Teilchen beeinflussen. Die Zahl der Teilchen N_r , die man in der Realität erwartet, ist gegeben durch die Zahl der simulierten Teilchen N_s : $N_r = SCAL \cdot N_s$. Gilt $SCAL > 1$ werden entsprechend weniger, für $SCAL < 1$ mehr Teilchen erzeugt. Ebenfalls vermindert werden kann die Anzahl der zu speichernden Teilchen mit YMIN und YTMIN. Diese beeinflussen die Wirkungsquerschnitte, da sie die Mindestenergie und den Mindesttransversalimpuls der zu erzeugenden Teilchen festlegen. Eine Aufstellung aller Parameter, ihrer Bedeutung und empfohlener Werte ist im Anhang zu finden.

¹³Diese hat ungefähr die Rechenleistung eines Rechners mit einer 33MHz i486-CPU.

¹⁴TRACKIT verwendet die schnelle Fouriertransformation zur Berechnung der Felder, und diese ist besonders effizient für eine Anzahl von Werten, die eine Zweierpotenz ist.

7.3 Paarerzeugung

In TRACKIT wird nach jedem Zeitschritt von MACPAR die Paarerzeugung für jeden der drei Prozesse in den Routinen MAKEEE, MAKEEG und MAKEGG bestimmt. Dabei wird die Integrationsroutine VEGAS von G. P. LEPAGE [20] benutzt. In ihr ist die Wahrscheinlichkeitsdichte p faktorisiert und jede Achse in fünfzig Abschnitte unterteilt. $w(\vec{x})$ ist dann gegeben durch

$$w(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n w_i(x_i).$$

Hierbei ist n die Anzahl der Dimensionen.

Um VEGAS als Ereignisgenerator benutzen zu können, wurden einige Änderungen vorgenommen. So werden der Routine jetzt die Elektronen- und Photondichte, die Zahl der Zellunterteilungen in x- und y-Richtung n_x , n_y und die Zahl der Scheiben in der Wechselwirkungszone übergeben. Sie gibt diese Werte an die jeweils aufgerufene Funktion weiter, die daraus dann die ortsabhängige Luminosität bestimmen kann. Außerdem übergibt VEGAS das Gewicht w , das sie dieser Funktionsauswertung im Gesamtintegral I zuordnet. Es gilt

$$I = \sum f(x)w \quad (44)$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Aufruf ein Paar zu erzeugen, ist also für den Zeitschritt i_t durch $L_{xy}(i_t)\sigma_{xy}(\vec{x})w(\vec{x})$ gegeben.

Die Grenzen der Intervalle werden in einem COMMON-Block gespeichert. Die aufrufenden Routinen sichern daher diese Daten für den nächsten Zeitschritt, um mit ihnen VEGAS erneut zu initialisieren.

Bei der Integration des Bethe-Heitler-Prozesses ist zu beachten, daß der im Unterprogramm VEGAS mit α bezeichnete Parameter, der die Geschwindigkeit der Konvergenz bestimmt, außerhalb des in [20] normalerweise empfohlenen Bereiches von [1.0; 2.0] gewählt werden muß; günstig ist zum Beispiel 0.5. Sonst ist das von VEGAS berechnete Integral instabil — es erreicht erst den richtigen Wert und fällt dann langsam ab, bis es plötzlich wieder das korrekte Ergebnis liefert, um abermals abzufallen.

Für die Güte der Integration und entsprechend auch die Qualität der Paarerzeugung sind die Parameter NCALL und NITER wichtig, die für die drei Prozesse getrennt festgelegt werden können. NCALL ist die Anzahl der Funktionsaufrufe zwischen zwei Anpassungen der Intervallgrenzen. NITER gibt die maximale Anzahl der Iterationen dieser Anpassungen an. Durch die Wahl einer geeigneten Genauigkeit wird sichergestellt, daß immer NITER Iterationen erfolgen, weil sonst die Gewichte falsch wären.

Da die Funktionen zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte deutliche Spitzen haben, darf NCALL nicht zu klein sein, um ein stabiles Ergebnis für jede Iteration zu erhalten. Andererseits ist natürlich eine größere Anzahl von Iterationen für

die Anpassung der Intervallgrenzen an die Funktion vorteilhaft. Ist das Produkt $\text{NITER} \cdot \text{NCALL}$ zu klein, so ist das Gewicht für jede einzelne Funktionsauswertung sehr groß. Da dann oft auch die Verteilung der Intervalle nicht besonders günstig ist, können bei einem einzigen Aufruf sehr viele Teilchen erzeugt werden.¹⁵ Die Verteilung wird dadurch sehr ungleichmäßig.

Ein sehr großes Produkt $\text{NITER} \cdot \text{NCALL}$ könnte allerdings, zusammen mit einem kleinen Wirkungsquerschnitt, dazu führen, daß sich die Diskretheit des Wertebereichs des Zufallszahlengenerators bemerkbar macht. Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zu erzeugen, wäre dann bei jedem Aufruf so klein, daß nur noch wenige Zufallszahlen gibt, die kleiner sind — im schlimmsten Fall nur noch die Null. Um diese Gefahr zu verringern, wird in STOREP die Wahrscheinlichkeit um den Faktor 100 erhöht, und für jedes so erzeugte Teilchen danach noch einmal ausgelost, ob es akzeptiert werden soll.

Für die Integration des Landau-Lifschitz-Wirkungsquerschnittes werden zudem neun aufeinanderfolgende Werte des Zufallszahlengenerators als Tupel benutzt (sieben über VEGAS und zwei in SIGEER). Daher besteht die Gefahr, daß die Punkte nicht gleichverteilt sind. Auch die Generatoren der CERN-Programm-bibliothek sind nur geeignet, Sechstupel zu liefern. Bei einer großen Anzahl von Aufrufen ist dies kein Problem, bei einer kleinen Zahl allerdings können die Ergebnisse deutlich verfälscht sein. Es empfiehlt sich daher, den Lauf mit einem anderen Zufallszahlengenerator zu wiederholen.

In TRACKIT können für jeden der drei Prozesse die Parameter NCALL und NITER festgelegt werden, sowohl für die Initialisierungsphase als auch für den Hauptteil. NEGC1 und NEGI1 enthalten dabei die Werte für den Bethe-Heitler-Prozeß in der Initialisierungsphase. Mit diesen Werten erfolgt die Adaption an den Wirkungsquerschnitt (ohne Paarerzeugung). Sie sollten daher nicht zu klein gewählt werden. NEGC1 = 10000 und NEGI1 = 80 haben sich bewährt. NEGC2 und NEGI2 legen die Werte für den ersten Teil der Integration im Hauptteil fest. In diesem wird für jeden Zeitschritt eine Anpassung der Gewichte an die Ladungsverteilung und das Beamstrahlungsspektrum erreicht. Es werden auch hier keine Teilchen erzeugt. Bewährt haben sich NEGC2 = 10000 und NEGI2 = 10. Das dritte Wertepaar NEGC3 und NEGI3 bestimmt schließlich die Zahl der Aufrufe und Iterationen für die Integration zur Paarerzeugung. Hier können NEGC3 = 10000 und NEGI3 = 10 gewählt werden. Für die beiden anderen Prozesse gibt es die entsprechenden Parameter, die im Anhang aufgeführt sind.

Da wie erwähnt der Landau-Lifschitz-Wirkungsquerschnitt ohne Berücksichtigung der geometrischen Reduktion nicht von den Parametern des Beschleunigers abhängt, eignet er sich zur Kontrolle der Integration durch VEGAS. Wird das vir-

¹⁵In einem Probelauf, der eine seltsame ϕ -Verteilung lieferte, wurden rund 1000 der etwa 20000 Teilchen bei einem einzigen Aufruf erzeugt. Dies ist möglich, da für Wahrscheinlichkeiten größer 1 entsprechend mehr Teilchen erzeugt werden können.

tuelle Photonenspektrum durch

$$n_v(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} \quad (44)$$

ersetzt, so stimmen die Ergebnisse gut mit denen aus [1] überein. Diese Übereinstimmung wird auch durch Einführen der beiden Ortskoordinaten und damit der ortsabhängigen Luminosität nicht beeinträchtigt. Die Erweiterung um den Transversalimpuls der virtuellen Photonen jedoch bewirkt eine Verkleinerung des Wirkungsquerschnitts. So sinkt er für $\gamma = 5 \cdot 10^5$ von ungefähr $2.3 \cdot 10^{-26} \text{cm}^2$ auf etwa $2.0 \cdot 10^{-26} \text{cm}^2$. Dieser Effekt wird dadurch hervorgerufen, daß die Lösung des Integrals über den Transversalimpuls der virtuellen Photonen nur näherungsweise erfolgt. Außerdem sind die von VEGAS berechneten Werte für sehr kleine Photonenergien schlecht, wie in Abbildung 9 zu sehen ist. Für zwei analytisch äquivalente Methoden das Integral zu berechnen sind diese Werte zudem sehr unterschiedlich. Verwendet man

$$n_1(x) = \frac{1}{x} \int_{\frac{x^2}{\gamma^4}}^{\frac{1}{\gamma^2}} \frac{\alpha}{\pi} \frac{x_{\perp}^2}{\left(x_{\perp}^2 + \frac{x^2}{\gamma}\right)^2} dx_{\perp}^2$$

$$n_2(x) = \frac{1}{x} \int_{\frac{x}{\gamma^2}}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\alpha}{\pi} \frac{2x_{\perp}^3}{\left(x_{\perp}^2 + \frac{x^2}{\gamma^2}\right)^2} dx_{\perp},$$

so ist n_1 bereits für sehr viel kleinere Werte x genau. Für die wichtigen Paare mit höherer Energie und vor allem höherem Transversalimpuls bedeutet dieser zu geringe Wirkungsquerschnitt jedoch keine Beeinträchtigung, da sie hauptsächlich von Photonen mittlerer Energie erzeugt werden.

7.4 Die Funktionen zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte

Der Aufbau der Funktionen, die die Wirkungsquerschnitte berechnen, ist stets gleich. Es gibt fünf verschiedene Ausführungen, jeweils zwei für den Bethe-Heitler- und den Landau-Lifschitz-Prozeß, nämlich mit oder ohne Berücksichtigung der geometrischen Reduktion, und eine für den Breit-Wheeler-Prozeß. Alle Funktionen erhalten von VEGAS eine Reihe von Zufallszahlen.

Aus den ersten drei Zufallszahlen werden die Energien x_1 und x_2 der beiden Photonen und des einen zu erzeugenden Teilchens bestimmt. Dabei werden alle Energien in Einheiten der Energie eines Strahlteilchens angegeben. Aus der Bedingung $x_1 x_2 > 1/\gamma^2$ ergibt sich für ein Tupel Zufallszahlen z_i :

$$x_1 = z_2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) + \frac{1}{\gamma^2}$$

$$x_2 = z_3 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2 x_1}\right) + \frac{1}{x_1 \gamma^2}.$$

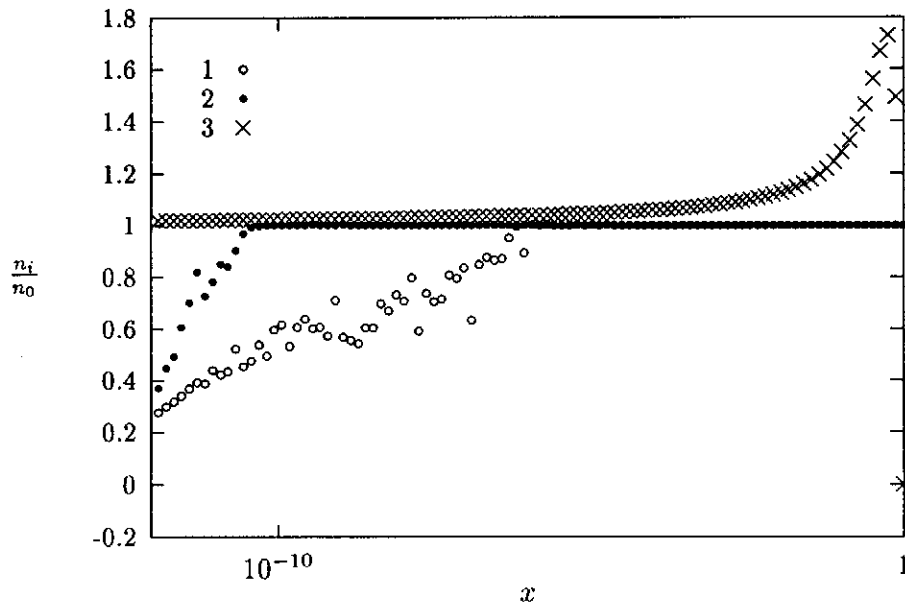


Abbildung 9: Das virtuelle Photonenspektrum. Hier ist das Verhältnis der Näherung $n_3(x)$, sowie der durch VEGAS berechneten Integrale $n_1(x)$ und $n_2(x)$ zum exakten Integral $n_0(x)$ zu sehen. Die Ergebnisse von VEGAS wurden mit NITER = 10 und NCALL = 1000 berechnet. Dabei wurde das eine Mal über den Transversalimpuls, das andere Mal über sein Quadrat integriert, siehe Text. Die großen Abweichungen der Näherung n_3 für $x \rightarrow 1$ sind nicht so bedeutsam, da die absolute Photonendichte dort gering ist.

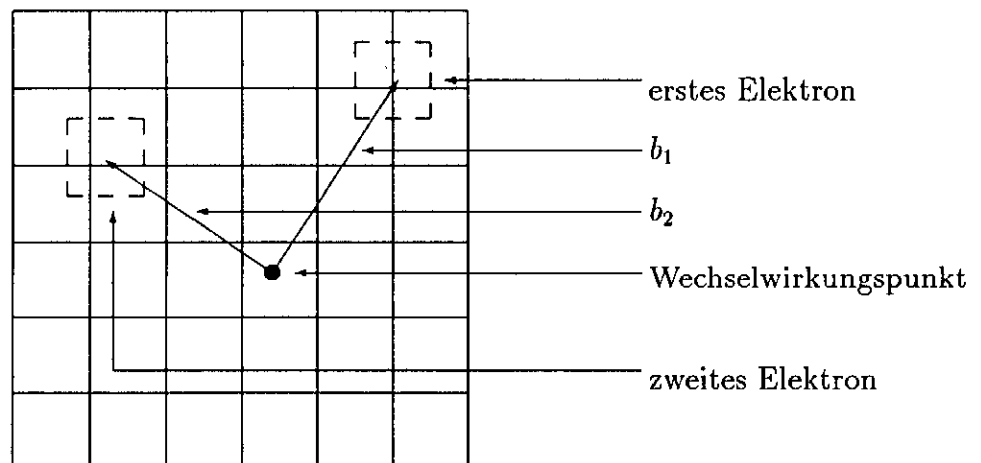


Abbildung 10: Die Bestimmung der Koordinaten der Elektronen für den Landau-Lifschitz-Prozess unter Berücksichtigung der geometrischen Reduktion

Die Energie des zu erzeugenden Teilchens muß zwischen denen der Photonen liegen (siehe Gleichung (31)). Außerdem muß sie natürlich die Mindestenergie Y_{MIN} überschreiten. Die Verwendung einer Mindestenergie, die größer ist als die Ruheenergie eines Elektrons, hat vor allem auf den Breit-Wheeler- und den Landau-Lifschitz-Prozeß großen Einfluß. Durch die Wahl von 5MeV sinkt der Wirkungsquerschnitt für den letzteren auf $\sigma_{LL} \approx 10^{-26} \text{cm}^2$ bei $E_b = 250 \text{GeV}$. Der Bethe-Heitler-Prozeß hingegen wird kaum beeinflusst, da die Stoßenergie, wie oben erwähnt, gewöhnlich sehr hoch ist. Für ein virtuelles Photon wird auch noch der Transversalimpuls benötigt:

$$x_{1t} = z_4 \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{x_1}{\gamma^2} \right) + \frac{x_1}{\gamma^2}.$$

Es ist wesentlich, die Parameter eines Stoßes so zu wählen, daß möglichst bei jedem Aufruf der Funktion ein Teilchen entstehen kann. Andernfalls nähme die Zahl der effektiven Auswertungen der Funktion ab. Dies beeinträchtigt zum einen die Genauigkeit der Integration und zum anderen die Statistik der Paarproduktion, da die Wahrscheinlichkeiten, ein Paar zu erzeugen, dann von Aufruf zu Aufruf noch unterschiedlicher sind als bei dem gewählten Verfahren.

Nach der Bestimmung der Energien und gegebenenfalls der Transversalimpulse werden β und $\cos \theta$ berechnet. Ergibt sich $\cos \theta > 1$ oder $\cos \theta < -1$, so kann kein Paar erzeugt werden¹⁶. VEGAS wird in diesem Fall ein sehr kleiner Wert zurückgegeben; dies ist in etwa einem Viertel der Fälle notwendig. Für $|\cos \theta| \leq 1$ wird, mit Hilfe zweier weiterer von VEGAS gelieferter Zufallszahlen, die x - und y -Koordinate des Ortes der Paarproduktion festgelegt. Ohne Berücksichtigung der geometrischen Reduktion wird einfach ein Rechteck von der Ausdehnung einer Zelle an diese Stelle gelegt und in ihm für jede Scheibe in der Wechselwirkungszone die Luminosität bestimmt. Ist jedoch ein Photon virtuell, so wird aus seinem Transversalimpuls der Stoßparameter b berechnet und ein Winkel zwischen 0 und 2π mit einem Zufallsgenerator bestimmt. Mit diesen beiden Werten kann der Ort des entsprechenden Elektrons festgelegt werden, wie Abbildung 10 verdeutlicht. Die Luminosität wird wie im Fall ohne geometrische Reduktion berechnet, nur daß zuerst die mittlere Dichte in jedem Rechteck bestimmt wird und anschließend die Multiplikation erfolgt. Die z -Koordinate wird mit zwei weiteren Zufallszahlen festgelegt. Die erste bestimmt die Scheibe, wobei deren Anteil an der Luminosität berücksichtigt wird. Die zweite legt die Position innerhalb der Scheibe fest, wobei die Wahrscheinlichkeit dort gleichverteilt angenommen wird.

Nachdem die Parameter des Stoßes vollständig bestimmt sind, wird der Wirkungsquerschnitt berechnet. Zusammen mit der Luminosität für diesen Stoß und dem Gewicht für diesen Funktionsaufruf erhält man die Wahrscheinlichkeit für die Produktion eines Paares. Diese wird mit den anderen Werten dem Unterprogramm STOREP übergeben, in dem entschieden wird, ob Paare entstehen. Es muß

¹⁶In diesem Fall müßte nämlich das zweite Teilchen einen unmöglichen Viererimpuls haben, siehe Abschnitt 5.4.

beachtet werden, daß sich das Integrationsvolumen von Aufruf zu Aufruf ändert und entsprechend das Ergebnis mit dem aktuellen Volumen multipliziert werden muß.

Der aufrufenden Routine VEGAS wird der Wirkungsquerschnitt um einen Faktor 10^{20} überhöht zurückgegeben. VEGAS benötigt den Wirkungsquerschnitt zur Adaption. Die Vergrößerung soll dafür sorgen, daß die Routine im guten Integrationsbereich, zwischen 10^{-10} und 10^{10} , bleibt. Werte unter 10^{-20} werden normalerweise nicht von Null unterschieden.

7.5 Die Photonenspektren

Das Beamstrahlungsspektrum läßt sich leicht aus dem von MACPAR gelieferten Histogramm gewinnen, indem die Werte oberhalb von $E_\gamma = 10^{-4} E_b$ durch Spline-Interpolation bestimmt werden, unterhalb dieser Grenze durch exponentielle Regression.

Das virtuelle Photonenspektrum wird einfach durch Anwendung der analytischen Formeln berechnet. Dabei wird in GAMVIR auch gleich der entsprechende, aus dem Transversalimpuls resultierende Phasenraum berücksichtigt.

7.6 Verfolgung der Teilchen durch den Strahl

Die Paare werden — soweit die Boolesche Variable DOTRCK auf .TRUE. gesetzt ist — von der Routine TRACK durch den Strahl verfolgt. In dieser Routine werden die Teilchen zuerst nach ihrer z -Koordinate sortiert, um zu bestimmen, in welcher Scheibe sie liegen. Dabei wird ein Zeiger auf das jeweils erste Teilchen einer Scheibe gesetzt. Anschließend werden der Reihe nach für jede Scheibe, die in ihr enthaltenen Teilchen durch den Strahl verfolgt. Dazu müssen die Potentiale für die Gitter dieser Scheibe bestimmt werden (durch die Routine CALCPH). Da ein Teilchen seine ursprüngliche Scheibe verlassen kann, müssen auch die Potentiale der beiden benachbarten Scheiben (sofern vorhanden) bekannt sein. Für jeden Schritt müssen also für jeweils eine Scheibe die Potentiale neu berechnet werden, die anderen beiden können aus dem vorhergehenden Schritt benutzt werden.

Die Potentiale werden mit Hilfe des weiter oben beschriebenen Verfahrens durch Anwenden der schnellen Fouriertransformation nach dem Faltungstheorem berechnet. Bei den aufgeführten Programmläufen wurden, ebenso wie bei den in Abschnitt 6.3 erwähnten Tests, stets fünf Gitter verwendet. Das innerste entspricht in seinen Ausdehnungen dem von MACPAR benutzten, das nächste wird in y -Richtung um $\sqrt{\sigma_x/\sigma_y}$ gedehnt, ebenso wie das dritte, das nun quadratisch ist. Anschließend werden die Gitter in beiden Richtungen zuerst um einen Faktor zwei, dann um den Faktor drei gegenüber ihren Vorgängern gestreckt. Dieses Verfahren erwies sich als das schnellste der getesteten, nämlich der einfachen Summation sowie der Lösung der Poissongleichung durch die Unterprogramme SOR oder ADI aus [22]. Für ein Ladungsgitter mit einer Anzahl von 30×30 Zellen

benötigt die zweifache Transformation bei doppelter Genauigkeit auf der VAX rund 0.3 s.

Die eigentliche Verfolgung der Teilchen wird in MOVEP durchgeführt. Die neu erzeugten erhalten dabei eine Sonderbehandlung durch die Routine MOVEPI, die sie nur jeweils um einen halben Schritt bewegt.

7.7 MOVEP und MOVEPI

Diese Routinen arbeiten nach dem oben geschilderten *leap-frog*-Verfahren. MOVEP zerlegt jeden Zeitschritt in NT kleinere. Die Teilchen werden nacheinander verfolgt, wobei für jeden Schritt zuerst das kleinste Gitter, das die Teilchenposition enthält, bestimmt wird. Die elektrischen und magnetischen Felder werden durch lineare Interpolation aus den elektrischen (Φ) und den magnetischen (Ψ) Potentialen berechnet (siehe Abbildung 11):

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{i+1,j+1}h_y + \Phi_{i+1,j}(1-h_y) \\ \Phi_2 &= \Phi_{i,j+1}h_y + \Phi_{i,j}(1-h_y) \\ \Phi_3 &= \Phi_{i-1,j+1}h_y + \Phi_{i-1,j}(1-h_y) \\ E_x &= [f_x(\Phi_1 - \Phi_2) + (1-f_x)(\Phi_2 - \Phi_3)] \frac{1}{\Delta x}, \\ \Psi_1 &= \Psi_{i+1,j+1}h_y + \Psi_{i+1,j}(1-h_y) \\ \Psi_2 &= \Psi_{i,j+1}h_y + \Psi_{i,j}(1-h_y) \\ \Psi_3 &= \Psi_{i-1,j+1}h_y + \Psi_{i-1,j}(1-h_y) \\ B_y &= -[f_x(\Psi_1 - \Psi_2) + (1-f_x)(\Psi_2 - \Psi_3)] \frac{1}{\Delta x},\end{aligned}$$

h_y ist der Abstand in y -Richtung vom Teilchenort zum Mittelpunkt der Zelle (i, j) , f_x der in x -Richtung zur Grenze zwischen den Zellen (i, j) und $(i+1, j)$. Die Felder in die andere Richtung lassen sich entsprechend bestimmen. Befindet sich ein Teilchen außerhalb des größten Gitters, so wird dessen Ladung als Monopol angenommen.

Aus den derart berechneten elektrischen Feldern wird zuerst die Beschleunigung \vec{a} bestimmt und $(1/2)\vec{a}\Delta t$ zur Geschwindigkeit addiert. Die Drehung durch das Magnetfeld beträgt

$$\theta = |\vec{B}| \frac{\sqrt{v_z^2 + v_s^2}}{\gamma} \Delta t.$$

Die Geschwindigkeiten v_z und v_s sind im Programm stets in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit ausgedrückt. v_s , die zum Magnetfeld senkrechte Transversalgeschwindigkeit des Teilchens, wird dabei durch einfache Vektormultiplikation mit dem Einheitsvektor in Richtung des Magnetfeldes bestimmt. Entsprechend erhält

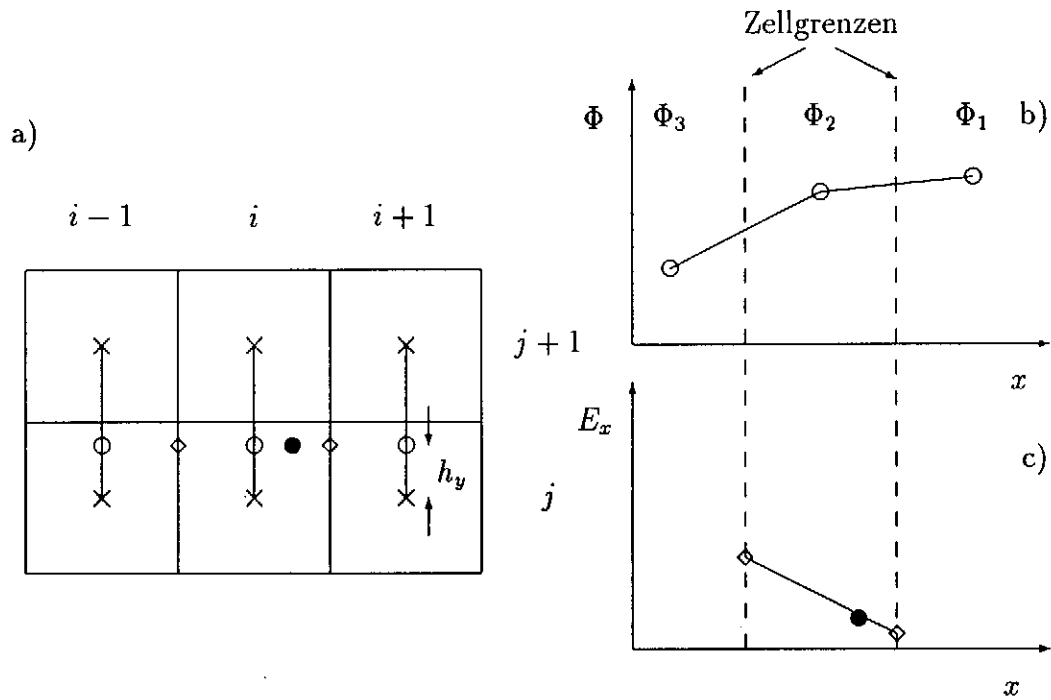


Abbildung 11: Ermittlung der elektrischen Feldstärken durch Interpolation. Die Potentiale sind in den durch Kreuze markierten Zellmittelpunkten bekannt a). Um aus ihnen das Feld in x -Richtung an der durch den gefüllten Kreis markierten Stelle zu bestimmen, werden zunächst die Potentiale Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 an den durch offene Kreise bezeichneten Stellen durch lineare Interpolation berechnet. Aus diesen Potentialen können die Felder an den Grenzen der Zellen (bei den Rhomben) gewonnen werden b). Nun kann das Feld am durch den gefüllten Kreis bezeichneten Ort durch lineare Interpolation berechnet werden c).

man v_p , die dem Feld parallele Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit wird rotiert:

$$\begin{aligned}v_x &= v_{xp} - \sin \theta v_z + \cos \theta v_{xs} \\v_y &= v_{yp} + \sin \theta v_z + \cos \theta v_{ys} \\v_z &= \cos \theta v_z - \sin \theta v_s.\end{aligned}$$

Anschließend erfolgt der zweite Teil der elektrischen Beschleunigung. Die Energie des Teilchens wird gemäß der durchlaufenen Potentialdifferenz geändert und die Geschwindigkeiten werden entsprechend neu normiert.

Verläßt ein Teilchen die Scheibe in z -Richtung, so wird auf die benachbarte Scheibe umgeschaltet, falls diese vorhanden ist.

MOVEPI ist im Aufbau mit MOVEP praktisch identisch, nur wird für jedes Teilchen bloß ein einziger Schritt ausgeführt. Dabei wird die Geschwindigkeit zuerst um $-\theta/2$ gedreht und anschließend um die halbe elektrische Beschleunigung verlangsamt. Danach sind Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten wie gefordert um einen halben Zeitschritt versetzt bekannt.

Ein Vergleich der Ergebnisse zwischen MOVEP und einem Unterprogramm zur Integration von Differentialgleichungen nach der Methode von Bulirsch-Stör aus [22] ergab, mit realistischen Parametern, für ein Teilchen im Feld einer Linienladung eine Abweichung der transversalen Endgeschwindigkeit von weniger als einem Prozent, falls der maximale Drehwinkel durch das Magnetfeld unter 0.1rad blieb. In MOVEP wird dieser maximale Winkel festgehalten und bei Beendigung des Programms ausgegeben. Sollte er zu groß sein, muß die Schrittweite des Programms entsprechend angepaßt werden. Sie wird durch NT, die Zahl der Schritte zur Verfolgung der erzeugten Teilchen je Zeitschritt, angegeben. Für die verwendeten Parametersätze war $NT = 30$ stets genau genug.

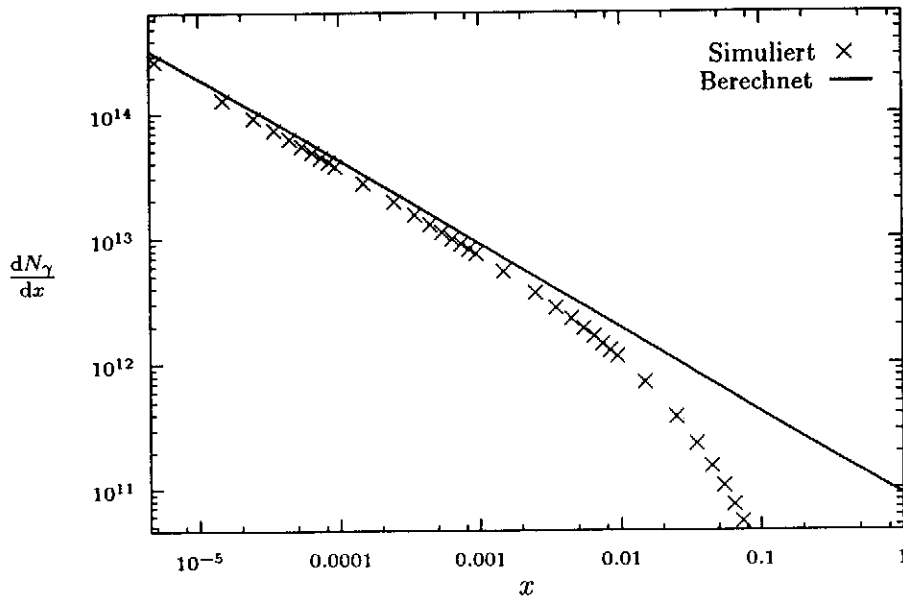


Abbildung 12: Das Beamstrahlungsspektrum für TESLA 2

8 Ergebnisse der Simulation

In der Tabelle 2 sind einige mögliche Parametersätze und Simulationsergebnisse für Linearbeschleuniger aufgeführt. Drei der Vorschläge beziehen sich auf TESLA, sie sollen im folgenden miteinander verglichen werden. Die anderen beiden dienen dem Vergleich mit grundsätzlich anderen Projekten. Bei JLC-C ist zu berücksichtigen, daß Υ recht groß ist, so daß zur Berechnung der Beamstrahlung die quantenmechanischen Formeln verwendet werden müßten. Dies ist jedoch bei MACPAR nicht möglich.

RBEAM ist ein Programm, das ebenfalls die *particle-in-cells*-Methode verwendet [21]. Es sagt im Vergleich zu den anderen Programmen für TESLA 1 und TESLA 3 besonders niedrige Energieverluste voraus. Das vierte Programm [2] arbeitet nach einem gänzlich anderen Verfahren als die ersten drei, siehe Abschnitt 8.8.

8.1 Die Luminositätserhöhung und das Beamstrahlungsspektrum

Die Luminositätserhöhungen, die die beiden Programme ABEL und MACPAR für die verschiedenen Beschleuniger berechnen, sind vergleichbar. Die maximale Abweichung liegt unter 30%, wobei nicht zu erkennen ist, daß ein Programm systematisch höhere Werte für H_D berechnet als das andere. Die größte Lumino-

	TESLA 1	TESLA 2	TESLA3	JLC-C	DESY-S-Band
E_b [GeV]	250	250	250	250	250
N [10^{10}]	5.14	2.5	5.14	1.0	2.1
L_0 [10^{29} cm $^{-2}$]	3.26	1.57	3.29	10.2	2.74
f_r [Hz]	8000	19000	8000	10800	8600
σ_x [nm]	639	495	1000	260	400
σ_y [nm]	101	64	64	3.04	32
σ_z [μ m]	1000	1000	1000	80	500
β_x^* [mm]	10	6	25	10	16
β_y^* [mm]	5	2	2	0.1	1
$\langle Y \rangle$	0.064	0.034	0.029	0.21	0.069
D_x	1.22	1.01	0.54	0.13	0.70
D_y	7.7	7.7	8.5	11.4	8.7
L [10^{29} cm $^{-2}$]	11.7	5.0	8.0	20.8	7.4
$L_{e\gamma}$ [10^{29} cm $^{-2}$]	19.4	5.3	7.2	11.3	7.1
$L_{\gamma\gamma}$ [10^{29} cm $^{-2}$]	42.7	7.0	8.8	6.9	8.4
H_D	3.6	3.2	2.4	2.0	2.7
δ [%]	9.3	3.8	3.0	14.0	6.8
N_γ	4.3	2.6	2.4	1.6	2.6
$\langle E_\gamma \rangle$ [GeV]	5.5	3.6	3.2	22	6.5
N^*	41.6	8.5	14.5	12.6	15.5
σ_{N^*}	5.8	2.1	2.7	2.2	2.8
L [10^{29} cm $^{-2}$]	13.7	4.6	8.8	16.7	7.5
$L_{e\gamma}$ [10^{29} cm $^{-2}$]	23.2	4.7	7.9	9.2	—
$L_{\gamma\gamma}$ [10^{29} cm $^{-2}$]	56.6	6.8	9.3	6.3	—
H_D	4.2	2.9	2.7	1.6	2.7
δ [%]	9.5	3.7	2.9	8.7	6.3
N_γ	4.9	2.9	2.6	1.6	2.8
$\langle E_\gamma \rangle$ [GeV]	5.0	3.3	2.8	13.5	2.2
H_D	4.1	3.2	2.2	—	—
δ [%]	7.7	3.5	1.8	—	—
H_D	3.1	—	1.9	—	2.0
δ [%]	11.3	—	3.2	—	6.2
$\langle E_\gamma \rangle$ [GeV]	6.9	—	3.4	—	6.9
N_γ	4.6	—	2.5	—	2.5

Tabelle 2: Parameter und Simulationsergebnisse für zukünftige Linearbeschleuniger. Die oberen Ergebnisse stammen von MACPAR beziehungsweise TRACKIT, es folgen die von ABEL, sowie einige von RBEAM und die mit einem Programm von R. BRINKMANN berechneten. N_γ ist die Anzahl der Beamstrahlungsphotonen je Strahlteilchen, $\langle E_\gamma \rangle$ ist die mittlere Energie der Photonen und N^* ist die Zahl der Elektronen mit einem Transversalimpuls $p_t > 20$ MeV/c und einem Winkel $\theta > 0.15$ rad.

sitätszunahme ergibt sich für TESLA 1, gefolgt von TESLA 2, TESLA 3 und DESY-S-Band. Die Simulation mit ABEL sagt dabei nur einen geringen Unterschied zwischen TESLA 2 und TESLA 3 voraus, die mit MACPAR einen größeren.

In Abschnitt 2.4 ist eine empirische Näherungsformel für die Luminositätszunahme eingeführt worden. Mit den Gleichungen (7) und (8) ist es möglich, die effektiven Strahlausdehnungen während der Durchdringung der beiden Teilchenpakete zu bestimmen und daraus die tatsächliche Luminosität. Die Simulationen stimmen mit diesen Vorhersagen ungefähr überein, wie am Beispiel TESLA 2 zu sehen ist. Es ergibt sich für MACPAR $H_D \approx 3.2$, für ABEL $H_D \approx 2.9$ und aus der in Abschnitt 2.4 gewonnenen Näherung $H_D \approx 2.9$. Da die Näherungslösung durch Simulationen gefunden wurde, bestätigt dies nicht die Korrektheit der Programme, sondern nur die Qualität der Näherung.

Für jeden der Beschleuniger stimmt die von MACPAR berechnete mittlere Energie der Beamstrahlungsphotonen gut mit der von ABEL bestimmten überein. Die Abweichungen betragen maximal nur etwas mehr als 10%. JLC-C muß von diesem Vergleich ausgenommen werden, da für $\Upsilon \approx 0.2$ die quantenmechanische Formel der Beamstrahlung verwendet werden muß, dies in MACPAR jedoch nicht geschieht. Durch Einsetzen der effektiven Strahlausdehnungen aus der Näherung in Gleichung (12) läßt sich die mittlere Energie E_γ je Photon bestimmen. Für kleine Υ ist sie ungefähr [23]

$$E_\gamma \approx 0.307 E_c = 0.307 \frac{3}{2} \langle \Upsilon \rangle E_b$$

ABEL liefert für TESLA 2 $\langle E_\gamma \rangle \approx 3.3 \text{ GeV}$, MACPAR $\langle E_\gamma \rangle \approx 3.6 \text{ GeV}$ und die auf den Resultaten von ABEL basierende Näherungsformel $\langle E_\gamma \rangle \approx 3.9 \text{ GeV}$. Die Übereinstimmung ist also in Anbetracht der gemachten Näherungen gut.

Auch die Ergebnisse von ABEL und MACPAR für die Anzahl der erzeugten Beamstrahlungsphotonen weichen nur wenig voneinander ab. Daraus folgt die große Ähnlichkeit der Werte für den mittleren Energieverlust eines Strahlteilchens.

Ein Vergleich des durch die Simulation gewonnenen Beamstrahlungsspektrums für TESLA 2 mit dem durch die Gleichung (24) vorhergesagten Spektrum zeigt ebenfalls recht gute Übereinstimmung, siehe Abbildung 12. Es wurde das Spektrum am Ende der Wechselwirkung benutzt, daher muß in die Gleichung für das Spektrum nach dem Zurücklegen der halben Bunchlänge ein zusätzlicher Faktor 2 eingeführt werden.

8.2 Der Energieverlust durch Beamstrahlung

Eine wichtige Größe eines Beschleunigers ist die bei einem Wechselwirkungsprozeß für die Erzeugung neuer Teilchen zur Verfügung stehende Energie. Sie ist durch $E_{cm} = \sqrt{s}$ gegeben, wobei s das Produkt der Summe der Viererimpulse der stoßenden Teilchen ist: $s = (p_1 + p_2)^2 c^2$. Für ultrarelativistische Teilchen gilt $s = 4E_1 E_2$. Da die Energien der stoßenden Teilchen variieren, ergibt sich eine

Verteilung $n_s(s)$, die sich aus dem ebenfalls normierten Energiespektrum $n_E(E)$ der Strahlteilchen näherungsweise¹⁷ bestimmen läßt

$$n_s(s) \approx \int_{\frac{s}{4E_b}}^{E_b} dE_2 n_E(E_2) n_E\left(\frac{s}{4E_2}\right).$$

Die Ergebnisse für das Energiespektrum der Strahlteilchen nach der Durchdringung der beiden Bunche sind nur begrenzt für einen Vergleich der Beschleuniger verwendbar. Aus ihnen läßt sich eine sehr grobe Näherung für das Luminositätsspektrum $L(E_{cm})$ während der Wechselwirkung gewinnen. Dazu muß man annehmen, daß der Energieverlust während der Wechselwirkung proportional zur bereits akkumulierten Luminosität ist. Integriert man nun über die Luminosität, so ergibt sich ein Spektrum, das zwar dem wirklichen nur sehr ungefähr entspricht, aber für einen ersten Vergleich der Beschleuniger untereinander brauchbar ist. Der Energieverlust der Elektronen wird in MACPAR ohne Berücksichtigung der quantenmechanischen Korrekturen berechnet, so daß vor allem für JLC-C das Spektrum zu ungünstig ausfällt; bei den anderen Beschleunigern fällt dies weniger ins Gewicht. In Abbildung 14 sind die Spektren für die fünf Beschleuniger zu sehen. Es ist deutlich, daß TESLA 3 die günstigste Verteilung hat gefolgt von TESLA 2 und DESY-S-Band.

8.3 Der maximale Ablenkwinkel der erzeugten Teilchen

Zur leichteren Kontrolle des Programms wurden Streudiagramme angefertigt. In diese wird jedes simulierte Teilchen gemäß seines Winkels und seiner Energie, beziehungsweise seines Transversalimpulses, eingetragen. Die Abhängigkeit des maximalen Ablenkwinkels durch die Strahlen läßt sich hier gut erkennen. Ist die Anzahl der Aufrufe von VEAGS zu gering, so macht sich dies oft in feinen nahezu horizontalen Streifen bemerkbar. Es werden dann viele Teilchen am gleichen Ort mit gleichem Winkel θ zur Strahlachse erzeugt. Sie unterscheiden sich nur durch die Richtungen ihrer anfänglichen Transversalgeschwindigkeit.

In den Diagrammen nach der Spurverfolgung lassen sich leicht drei Gruppen von Teilchen unterscheiden. Am auffälligsten ist der relativ schmale dunkle Streifen. Er besteht aus den Teilchen, die dem gleichgeladenen Strahl entgegen geflogen sind und von diesem nach außen abgelenkt wurden. Im Vergleich zu der dadurch verursachten Winkelablenkung sind der ursprüngliche Entstehungsort und die Richtung zur Strahlachse nicht entscheidend. Die zweite Gruppe bilden die Teilchen, die geringere Energie bei gleichen Winkeln haben. Sie fliegen mit dem gleichgeladenen Strahl und werden fokussiert. Für ihren Winkel sind der Entstehungsort, die Entstehungszeit und der Winkel zur z-Achse entscheidend, da

¹⁷Die Näherung besteht in der Vernachlässigung der Ortsabhängigkeit der Energie der Strahlteilchen.

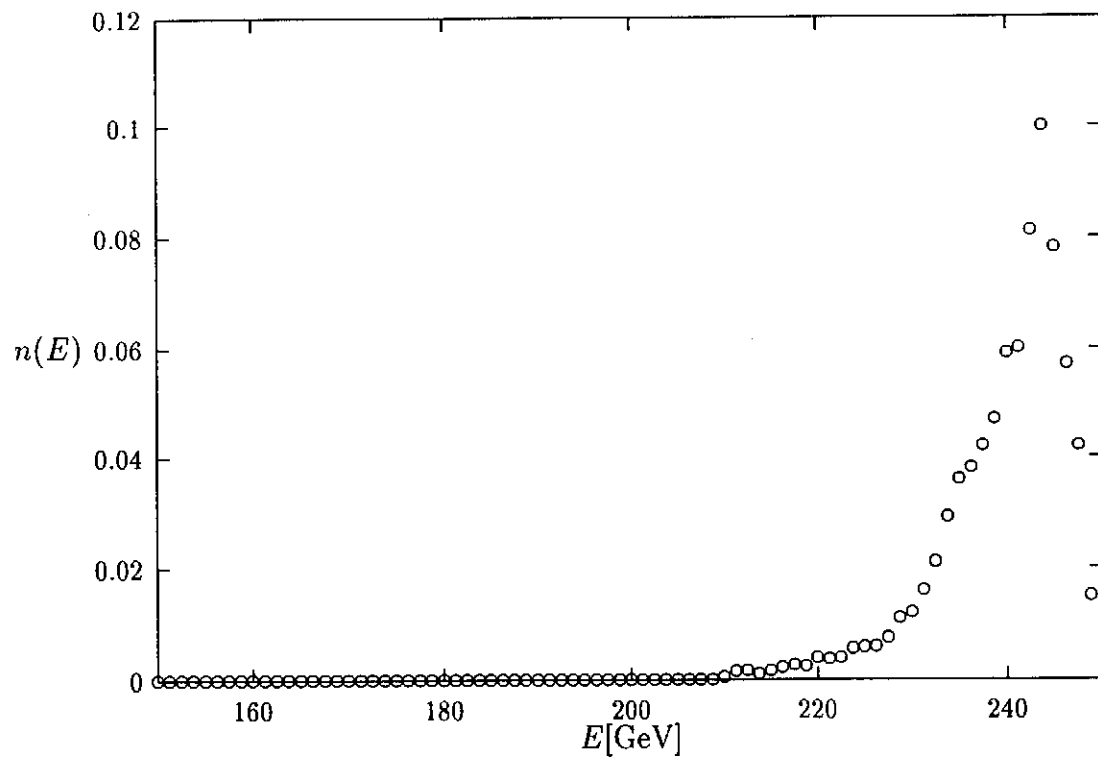


Abbildung 13: Das normierte Energiespektrum der Strahlteilchen nach der Wechselwirkung für TESLA 2.

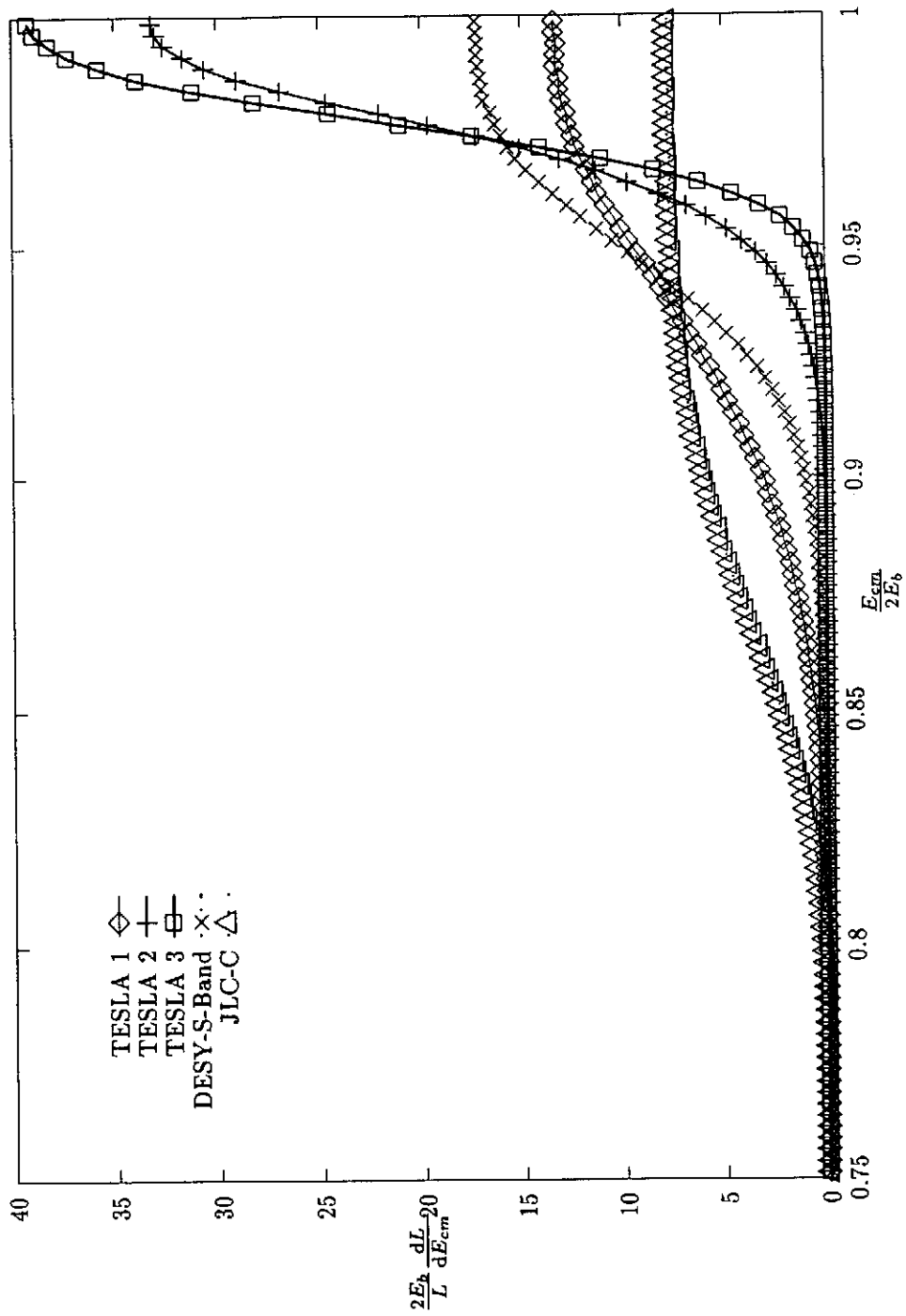


Abbildung 14: Ein Vergleich der genäherten Luminositätsspektren.

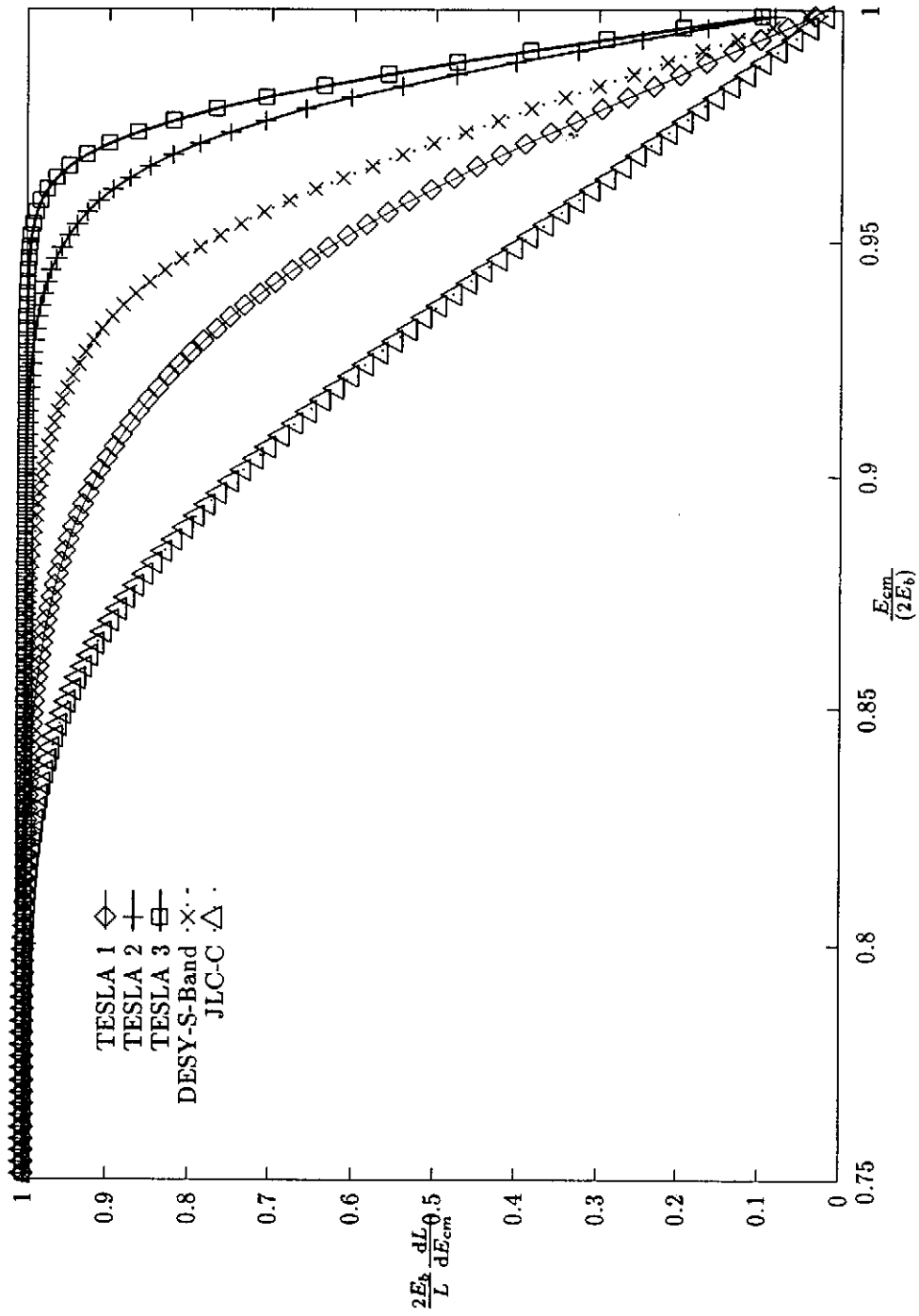


Abbildung 15: Ein Vergleich der integrierten genäherten Luminositätsspektren.

sie die Schwingungsamplitude und die Schwingungsphase bestimmen. Die letzte Gruppe wird durch die Teilchen gebildet, die bereits mit großem Winkel und hoher Energie erzeugt und durch die Bunche kaum beeinflusst wurden.

In Abschnitt 2.5 wurde für den maximalen Ablenkwinkel aufgrund der Defokussierung die folgende Näherung hergeleitet:

$$\theta_m = \sqrt{4 \frac{\ln\left(\frac{D'}{\epsilon} + 1\right) D' \sigma_x'^2}{\sqrt{3\epsilon} \sigma_z^2}}.$$

Dabei gilt $D' = Nr_e/\sigma_z(\gamma\sigma_x'^2)$. In der Abbildung 16 sind die genäherten Werte ebenfalls eingetragen. Es zeigt sich, daß die Übereinstimmung mit der Simulation recht gut ist.

Für JLC-C gibt es in [16] eine vergleichbare Darstellung der Teilchen, in der sie gemäß Transversalimpuls und Winkel eingetragen sind. Die Übereinstimmung für größere Winkel ist sehr gut, für die kleineren gibt es leichte Abweichungen, so besitzen die Teilchen, die einen Winkel von 4 mrad erreichen, bei TRACKIT maximal 15% höhere Energie als die in ABEL.

8.4 Die Winkelverteilung der erzeugten Teilchen

Aus der Winkelverteilung der erzeugten Elektronen und Positronen in der xy -Ebene kann für die symmetrischen Fälle nachgeprüft werden, ob die Symmetrie nicht durch fehlerhaftes Simulieren der Bahnen beeinträchtigt wird. Neben Programmierfehlern könnte auch eine Akkumulation numerischer Ungenauigkeiten eine Verfälschung der Ergebnisse bewirken. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie die Abbildungen 17 bis 20 zeigen. Die Länge der Striche ist der Zahl der Teilchen proportional, die in diese Richtung fliegen. Es ist am Beispiel von JLC-C gut zu sehen, daß die fokussierten Teilchen bevorzugt in die Richtung der x -Achse, die defokussierten ein wenig mehr in die der y -Achse fliegen. Die Winkelverteilung der fokussierten Teilchen ist aus den Gleichungen (5) durch Einsetzen von σ_x für x_0 beziehungsweise σ_y für y_0 leicht ersichtlich. Die Verteilung der defokussierten Teilchen ist darauf zurückzuführen, daß diese den Strahl schnell in y -Richtung verlassen (er ist sehr flach). Für kleine Abstände in y -Richtung wirkt der Strahl jedoch wie eine Flächenladung, die mehr in y -Richtung beschleunigt. Es ist zu beachten, daß die Richtung der fokussierten Teilchen von ihrem Entstehungsort abhängt und durch die Felder innerhalb und unmittelbar in der Nähe des Strahles stark beeinflusst wird. In einiger Entfernung vom Bunch zeigen sie in die Flugrichtung. Daher können kleine Fehler bei der Berechnung der Felder in den Gittern (es gab wie erwähnt leichte Abweichungen in der Richtung) sich deutlich auswirken. Bei einem Testlauf mit einem runden Strahl ergaben sich sehr gute zylindersymmetrische Verteilungen der Teilchen. In diesem Fall zumindest sind also die Richtungsfehler der Feldlinien für die Flugrichtung der Elektronen und Positronen unbedeutend. Das Bild der Winkelverteilung bei der Erzeugung

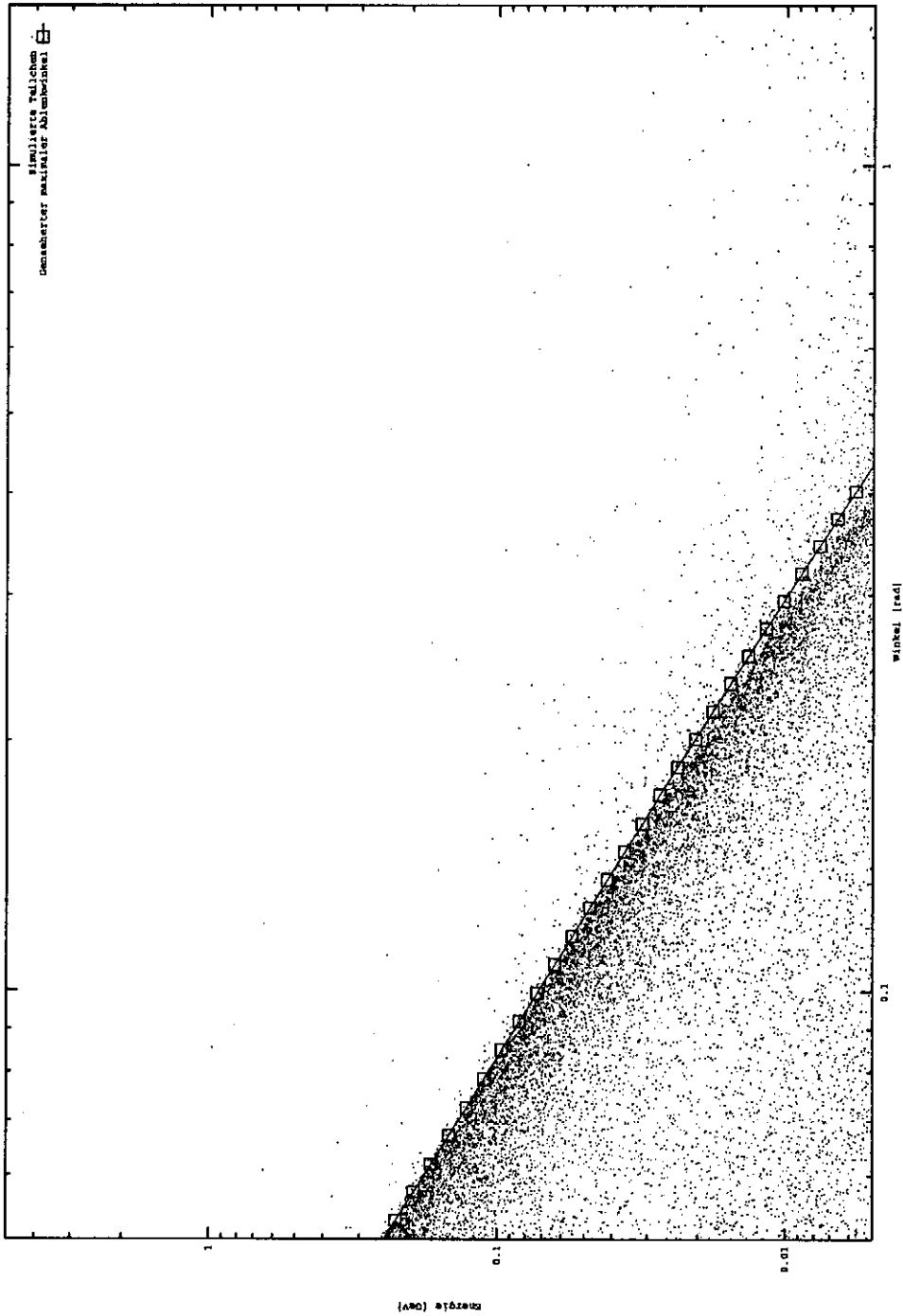


Abbildung 16: Die Verteilung der Teilchen nach der Kreuzung der beiden Bunche für TESLA 2.

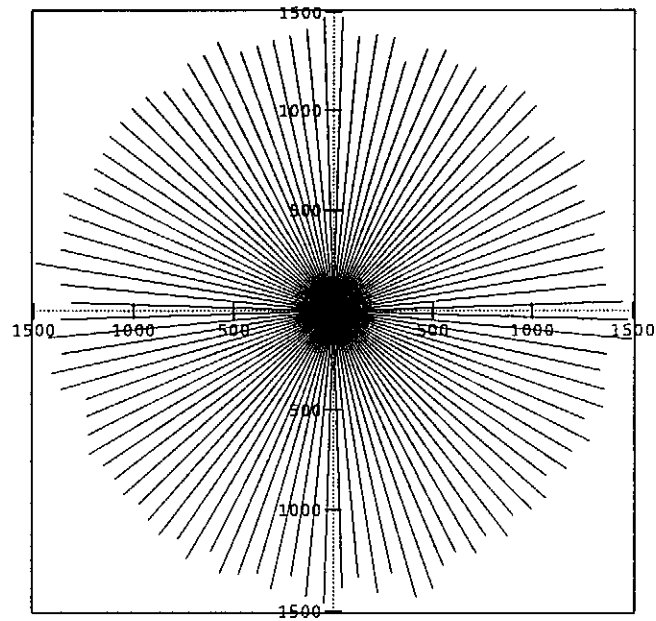


Abbildung 17: Die Φ -Verteilung bei der Erzeugung der Paare für JLC-C.

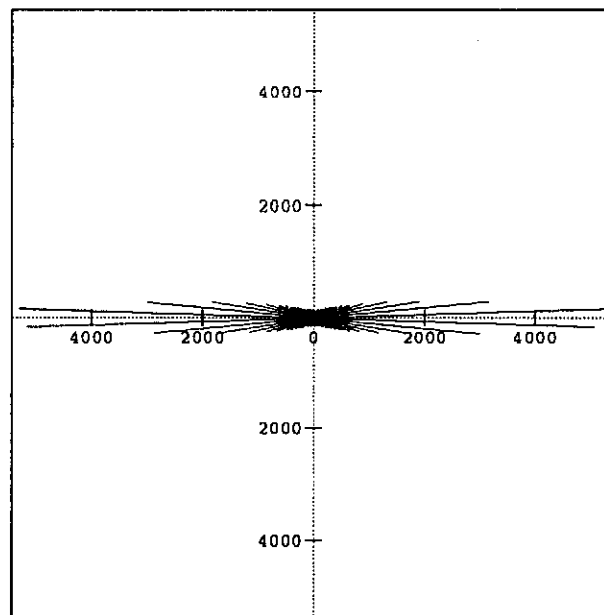


Abbildung 18: Die Φ -Verteilung der fokussierten Teilchen für JLC-C.

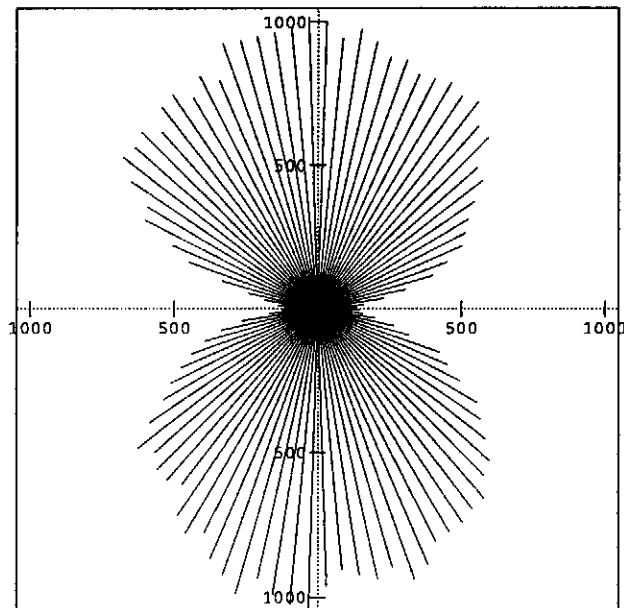


Abbildung 19: Die Φ -Verteilung der defokussierten Teilchen für JLC-C.

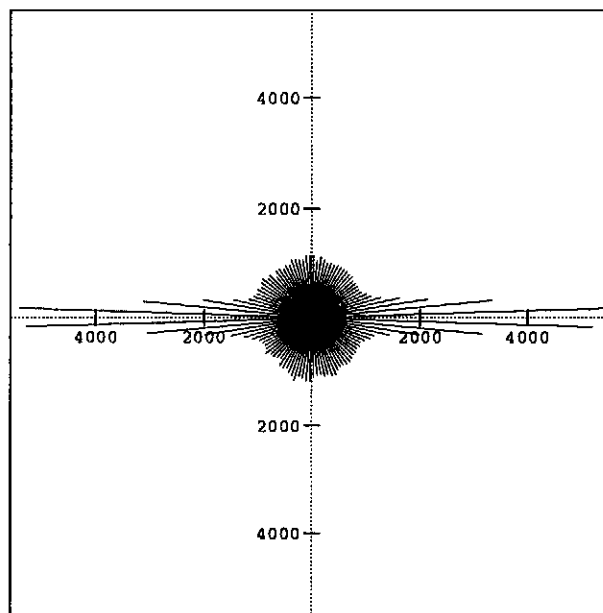


Abbildung 20: Die Φ -Verteilung aller Teilchen nach der Wechselwirkung für JLC-C.

soll eine Vorstellung ermöglichen, inwieweit durch eine ungleichmäßige Verteilung der Zufallszahlen Fehler hervorgerufen werden. Weist diese Winkelverteilung offensichtliche Inkonsistenzen auf, so sind die anderen Ergebnisse unbrauchbar.

8.5 Die Teilchenbahn im Detektor

Abbildung 21 zeigt schematisch eine Seitenansicht eines möglichen Detektoraufbaus. Die kegelförmige Maske hat einen inneren Öffnungswinkel von θ_0 (oft wird $\theta_0 = 0.15$ rad angenommen, so etwa in [28]) und soll den Detektor von den an der Stirnseite gestreuten Teilchen abschirmen. Im Detektor verläuft ein Magnetfeld in z -Richtung. Unter Vernachlässigung der Felder der beiden Bunche laufen die erzeugten Teilchen daher auf Wendelbahnen zur vorderen oder hinteren Detektorwand. Ihre Bahnen lassen sich leicht berechnen. Für den Durchmesser der Schraubenlinien gilt:

$$r = \frac{|p_{\perp}|}{eB},$$

$$r[\text{mm}] \approx 3.3 \frac{|p_{\perp}[\text{MeV}/c]|}{B[\text{T}]}.$$

Beträgt die Entfernung vom Wechselwirkungspunkt zum Beginn der Maske $z_M = 30$ cm, wie oft angenommen, so kann die Maske nur von solchen Teilchen außen getroffen werden, für die das Verhältnis $p_{\perp 0}[\text{MeV}/c]/B[\text{T}] > 6.8$ ist¹⁸. Der Winkel zur Strahlachse ist beim Verlassen der Wechselwirkungszone maximal. Ist er kleiner als θ_0 , so kann das Teilchen daher den Kegel nicht verlassen, unabhängig von seinem Transversalimpuls.

Die Vernachlässigung der Strahlfelder erscheint sinnvoll, obwohl in der Nähe der beiden Bunche große Feldstärken herrschen und die Flugzeit der Teilchen bis zum Auftreffen auf die Detektorwand sehr viel größer ist als die während der Wechselwirkung. Zum einen wirken die von den elektrischen und magnetischen Feldern erzeugten Kräfte stets gegeneinander, da die Teilchen fast parallel zum Strahl fliegen. Eine nennenswerte resultierende Kraft entsteht nur, falls das Teilchen in einem größeren Winkel zur Strahlachse fliegt. Die radiale Beschleunigung ist proportional zu $(1 - \cos \theta)$, wie im Abschnitt über den Pincheffekt zu ersehen ist, wenn man in Gleichung (2) $\beta_z = \cos \theta$ und $\beta_r = 0$ einsetzt. Die Teilchen mit einem größeren Winkel wurden, ebenso wie die anderen, bereits eine gewisse Zeit durch den Strahl verfolgt, so daß sie einen größeren Abstand zur Strahlachse besitzen. Hier sind die Felder sehr viel geringer. Zudem bleiben sie hinter dem in gleicher Richtung fliegenden Bunch zurück, so daß eine Störung nur kurze Zeit wirken kann.

Um zu testen, inwieweit die Felder der Bunche wirklich vernachlässigbar sind, wurde für diese eine longitudinal gaußverteilte und transversal homogene Ladungsdichte angenommen. Der Radius r dieses Zylinders wurde variiert, aber stets

¹⁸Die maximale Entfernung eines Teilchens zu Strahlachse beträgt rund $2r$.

sehr klein gehalten ($r \leq 10$ nm), um die durch die Felder verursachten Effekte zu übertreiben, die übrigen Parameter wurden aus der Simulation übernommen. Das Detektorfeld betrug 1–2 T. Mit zwei Unterprogrammen zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen¹⁹ wurden die Teilchen über eine Flugstrecke von ungefähr einem Meter verfolgt. Die x - und y -Koordinaten wurden dabei an einigen Stellen gespeichert und später mit denen der Wendelbahnen graphisch verglichen.

Für Teilchen mit einem großen maximalen Abstand zur Strahlachse ergaben sich dabei sehr geringe Abweichungen. Insbesondere der Radius der Bahnen war praktisch identisch. Allerdings gab es leichte Unterschiede in der Phase. Insgesamt läßt sich wohl sagen, daß die analytischen Bahnen eine hinreichend genaue Vorstellung von der Verteilung der Teilchen auf der Oberfläche des Detektors zu geben vermögen.

Die Histogramme der Transversalimpulsverteilung ermöglichen einen einfachen Vergleich des Untergrundes in verschiedenen Beschleunigern. In ihnen wird die Anzahl der Teilchen mit einem Transversalimpuls größer als p_{\perp} und einem Winkel größer als $\theta_0 = 0.15$ rad gegen den Transversalimpuls aufgetragen. So ist auch ein Vergleich mit den in Abschnitt 5.6 hergeleiteten Abhängigkeiten der drei Wirkungsquerschnitte für die Paarerzeugung vom Winkel θ_0 und dem Transversalimpuls p_{\perp} möglich.

Wie dort ausgeführt handelt es sich um eine obere Abschätzung, da in Gleichung (35) ein Faktor, der zwischen 0.5 und 1 liegen kann, durch 1 ersetzt wird. Jedoch stimmen die Ergebnisse der Simulation gut mit dieser Abschätzung überein wenn die Wirkungsquerschnitte aus den Gleichungen (37) bis (39) mit der durch MACPAR ermittelten tatsächlichen Luminosität multipliziert werden; siehe Abbildungen 22 bis 25. P. CHEN multipliziert die Näherungsformeln mit 0.7, um eine bessere Abschätzung zu erzielen, wie aus [4] zu ersehen ist. Aus den Ergebnissen von TRACKIT ist ein derartiger Faktor nicht sicher abzuleiten; die Simulationen sind mit der Näherung ohne diesen Faktor vereinbar.

Für den Parametersatz TESLA 2 sind die Diagramme vor und nach der Spurverfolgung praktisch identisch, es ist nur eine leichte Zunahme der Anzahl der Teilchen mit geringem Transversalimpuls zu bemerken. Bei JLC-C ist jedoch die maximale Ablenkung der erzeugten Teilchen durch die Strahlfelder so groß, daß sie sich in Abbildung 25 deutlich bemerkbar macht. Es ist aus diesem Diagramm leicht zu sehen, daß selbst bei einem Magnetfeld von 2T mit vielen Treffern von Teilchen auf der Detektormaske gerechnet werden muß.

8.6 Treffer auf der Detektorwand

¹⁹Dabei handelt es sich das eine Mal um ein Runge-Kutta-Verfahren, das andere Mal um das von Bulirsch-Stör. Zur Adaption diente bei beiden die gleiche Routine. Die Ergebnisse waren praktisch nicht zu unterscheiden, und bei Probeläufen ohne Strahl exakt mit den analytischen identisch. Allerdings darf man hier auf keinen Fall die relativistische Bewegungsgleichung nähern, die Änderung der Energie ist entscheidend.

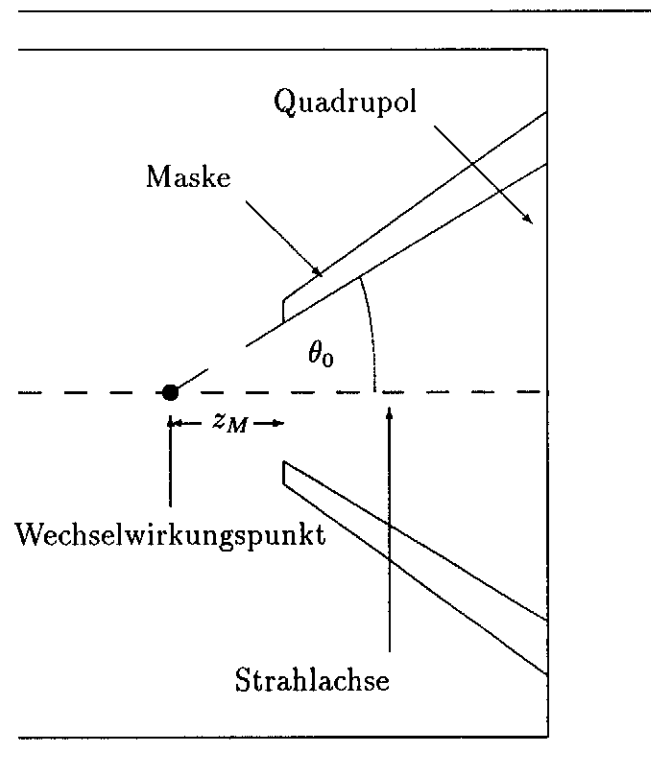


Abbildung 21: Beispiel für einen Detektoraufbau. Die Abbildung ist vertikal gestreckt. z_M ist der Abstand des Wechselwirkungspunktes von der Öffnung der kegelförmigen Maske, θ_0 der innere Öffnungswinkel der Maske.

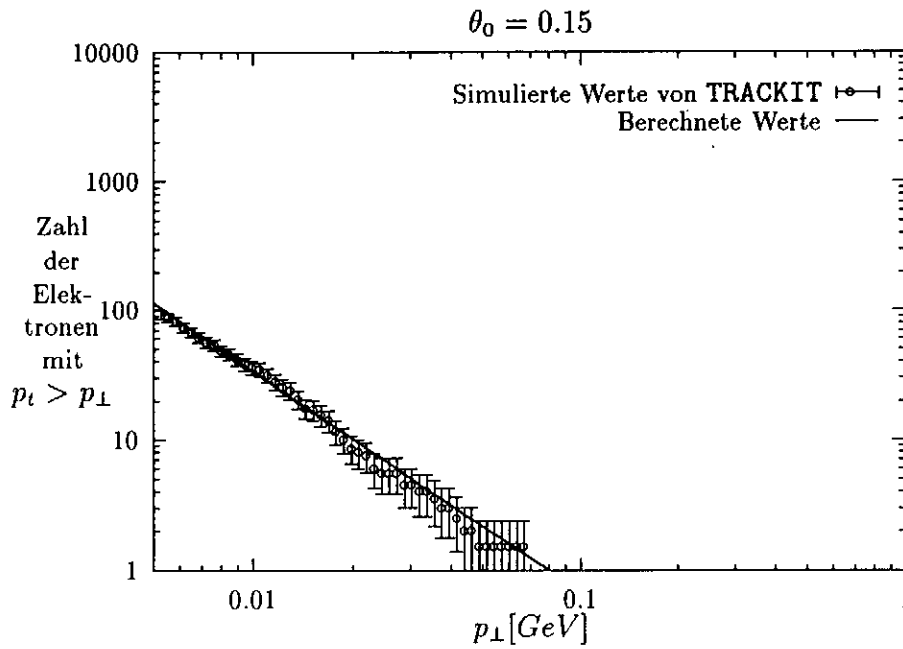


Abbildung 22: Die Transversalimpulsverteilung des Paaruntergrundes für TESLA 2 vor der Verfolgung durch den Strahl.

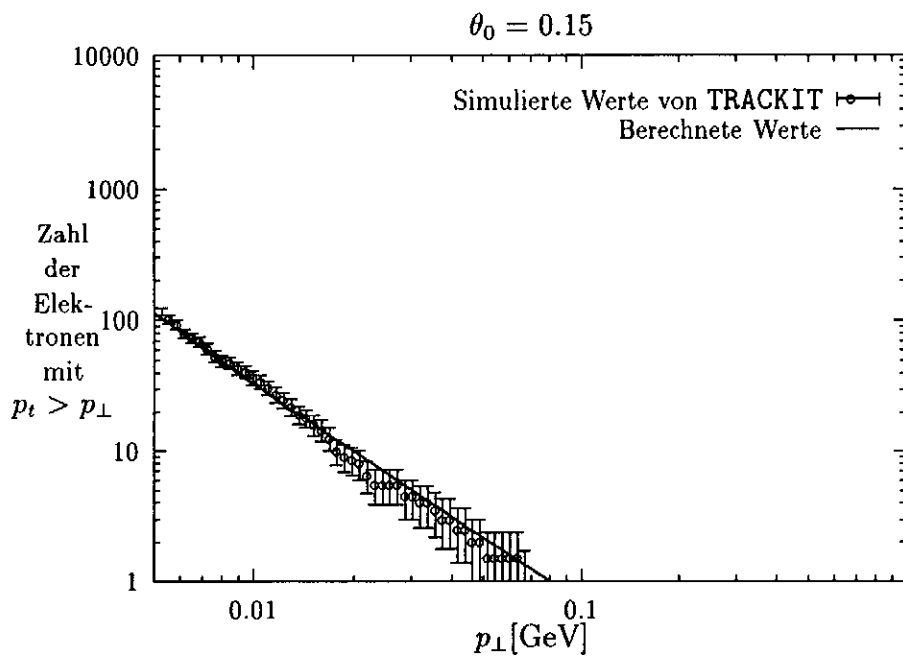


Abbildung 23: Die Transversalimpulsverteilung des Paaruntergrundes für TESLA 2 nach der Verfolgung durch den Strahl.

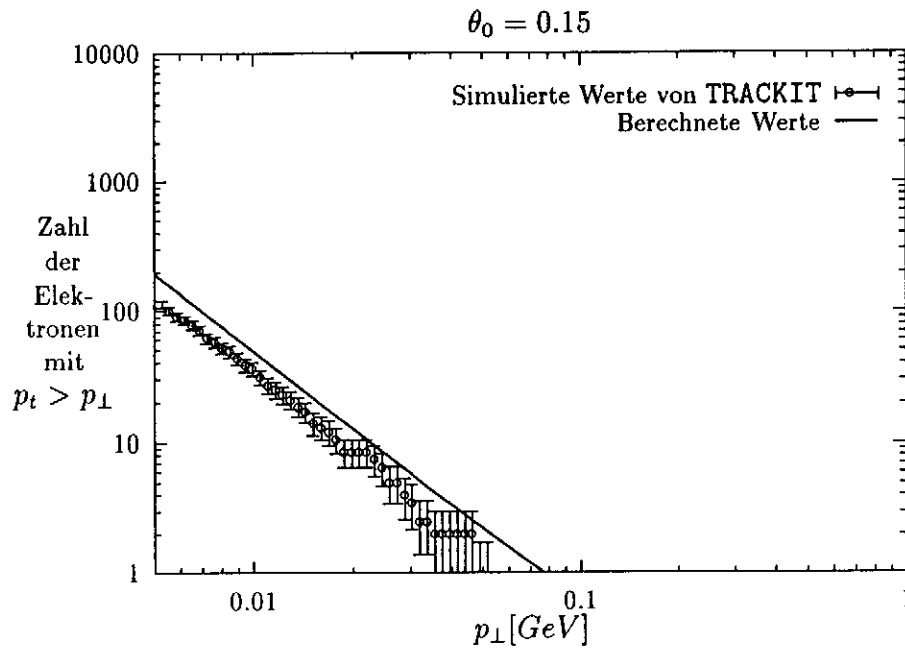


Abbildung 24: Die Transversalimpulsverteilung des Paaruntergrundes für JLC-C vor der Verfolgung durch den Strahl.

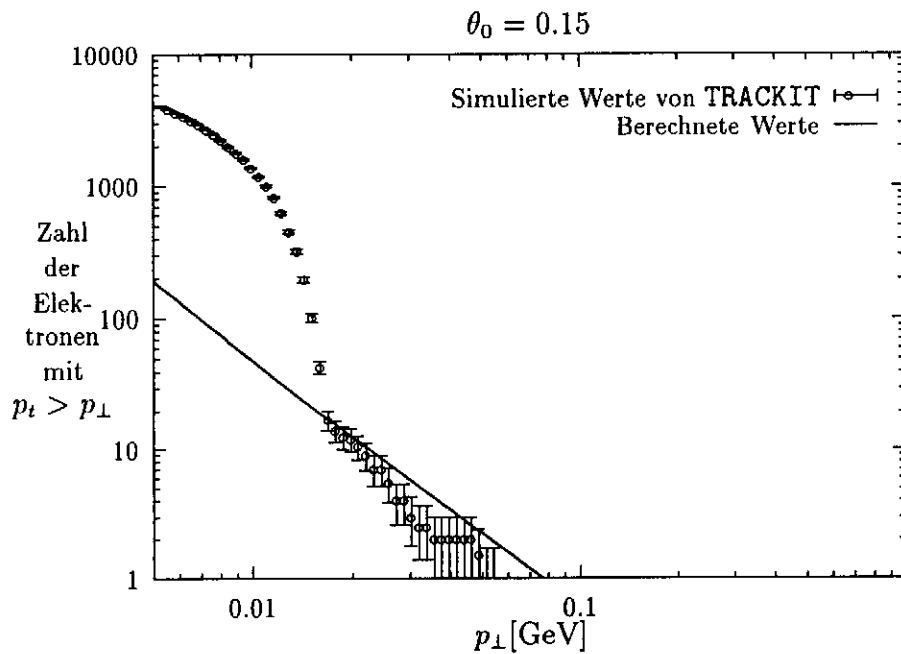


Abbildung 25: Die Transversalimpulsverteilung des Paaruntergrundes für JLC-C nach der Verfolgung durch den Strahl.

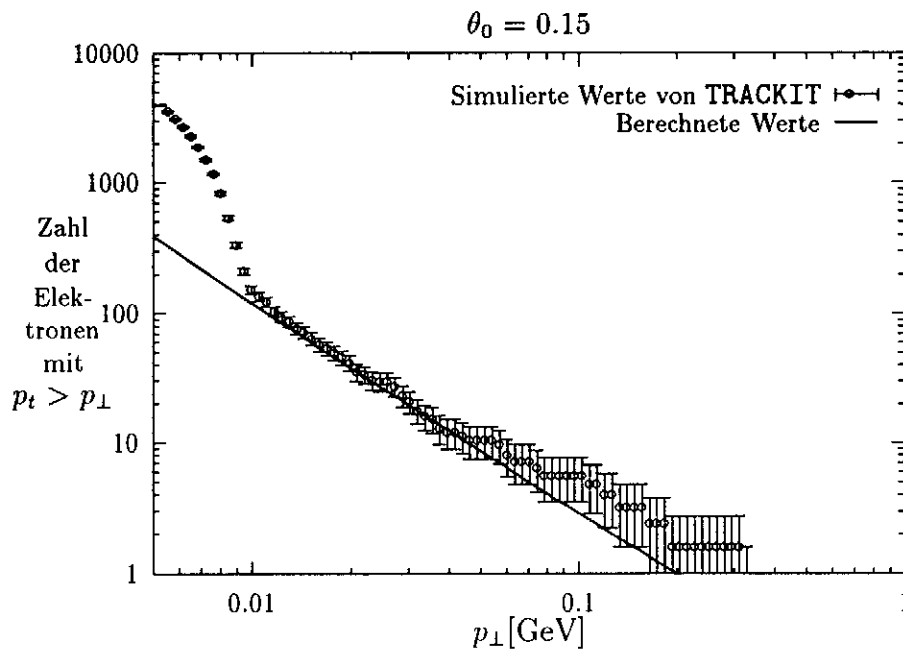


Abbildung 26: Die Transversalimpulsverteilung des Paaruntergrundes für TESLA 1 nach der Verfolgung durch den Strahl.

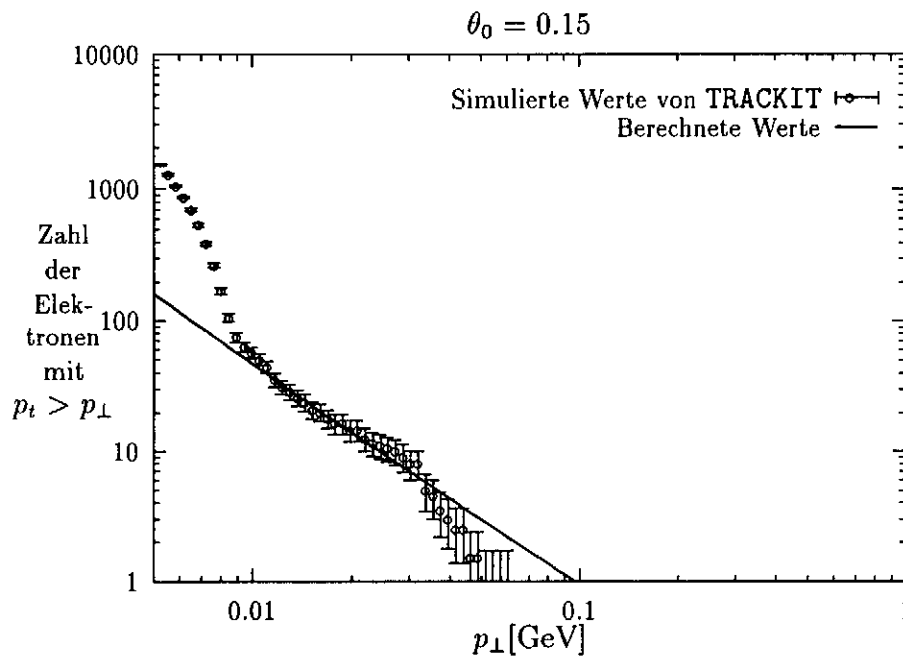


Abbildung 27: Die Transversalimpulsverteilung des Paaruntergrundes für TESLA 3 nach der Verfolgung durch den Strahl.

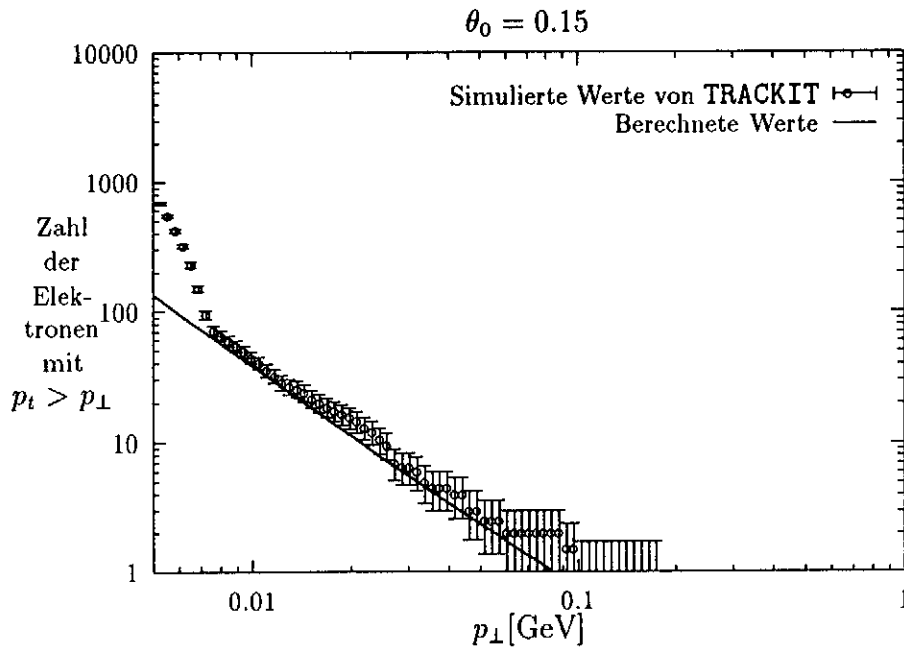


Abbildung 28: Die Transversalimpulsverteilung des Paaruntergrundes für DESY-S-Band nach der Verfolgung durch den Strahl.

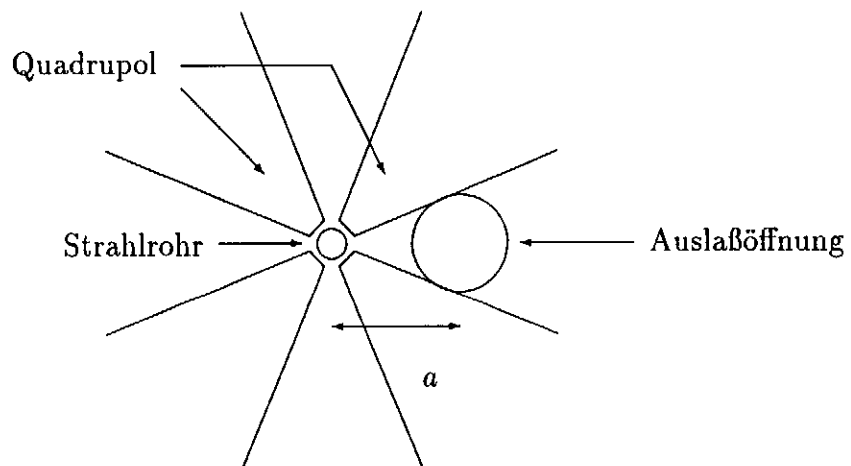


Abbildung 29: Die Ansicht der Stirnseite eines Detektors, a beträgt einige Millimeter.

Beim Entwurf des Detektors muß sichergestellt sein, daß die beiden Strahlen nach der Wechselwirkung nicht in das Rohr des jeweils anderen hineinlaufen. Deshalb wird gewöhnlich vorgesehen, daß sich die Strahlen unter einem kleinen Winkel zur z -Achse kreuzen, so daß sie neben der Öffnung des Strahlrohres die andere Detektorseite erreichen. Dort befindet sich eine weitere Öffnung, durch die sie den Detektor verlassen können. Deren maximale Größe ist vom Kreuzungswinkel abhängig. Da dieser möglichst klein sein sollte, ist sie also eher gering, siehe Abbildung 29. Wie groß die Auslaßöffnung mindestens sein muß, wird durch den maximalen Flugwinkel der Strahlteilchen bestimmt. In Abbildung 30 sind die integrierten Winkelverteilungen für verschiedene Beschleuniger zu sehen. Die Unterschiede sind beträchtlich, jedoch übersteigt der maximale Winkel bei keinem der Parametersätze 1 mrad. Die erzeugten Teilchen haben jedoch teilweise sehr große Winkel zur Strahlachse, so daß sie auf die Wand treffen können. MACPAR erlaubt es nicht, einen Kreuzungswinkel zwischen den Strahlen einzuführen, aber die Verteilung, die sich aus einer frontalen Kollision ergibt, ermöglicht einen Vergleich verschiedener Beschleuniger.

Zur Bestimmung der Trefferzahl der Teilchen auf der Maske und der Verteilung an der Detektorwand hinter der Maske wurde das Programm SCHEIBE entwickelt. Die Bahngleichung eines Teilchens mit Anfangskordinaten (x_0, y_0, z_0) und einer Geschwindigkeit $(\beta_x, \beta_y, \beta_z)c$ ist durch

$$\begin{aligned} x(z) &= x_0 + \frac{\gamma mc}{B_z} \left[\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2} \sin \theta' + \beta_y \right] \\ y(z) &= y_0 - \frac{\gamma mc}{B_z} \left[\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2} \cos \theta' + \beta_x \right] \\ \theta' &= -\text{atan2}(\beta_y, -\beta_x) - \frac{B_z}{\gamma m} \Delta t \end{aligned}$$

gegeben. Die Funktion $\text{atan2}(a, b)$ liefert dabei den Arcustangens von a/b unter Berücksichtigung des richtigen Quadranten. Die Flugzeit Δt ist einfach durch $\Delta t = |\Delta z / (\beta_z c)|$ gegeben. In diesem Programm wird zuerst festgestellt, ob das Teilchen nach einer in z -Richtung zurückgelegten Strecke von 30cm die Öffnung der Maske trifft. Die in die Maske hineinfliegenden Teilchen werden bis zur Detektorwand verfolgt, und ihre Auftreffpositionen werden festgehalten. In der Abbildungen 31 ist deutlich die nach außen hin abnehmende Trefferdichte zu sehen. Die Verteilung hat eine relativ scharfe Kante. Die Größe des getroffenen Bereichs ist stark vom Magnetfeld abhängig, wie der Vergleich zwischen den Ergebnissen für 1 T, beziehungsweise 2 T zeigt. Allerdings ist er nicht linear, da für starke Magnetfelder die Teilchen mit großem Transversalimpuls, aber kleinem Winkel zur Strahlachse wichtig werden. Diese tragen auch viel dazu bei, daß der Trefferbereich hinter der Maske größer als ihre Einlaßöffnung ist.

In den Streudiagrammen des Untergrundes an der Detektorwand läßt sich die radiale Verteilung quantitativ schlecht darstellen. Dazu sind Histogramme in denen gegen den Radius r die Zahl der Teilchen mit einem Abstand größer als

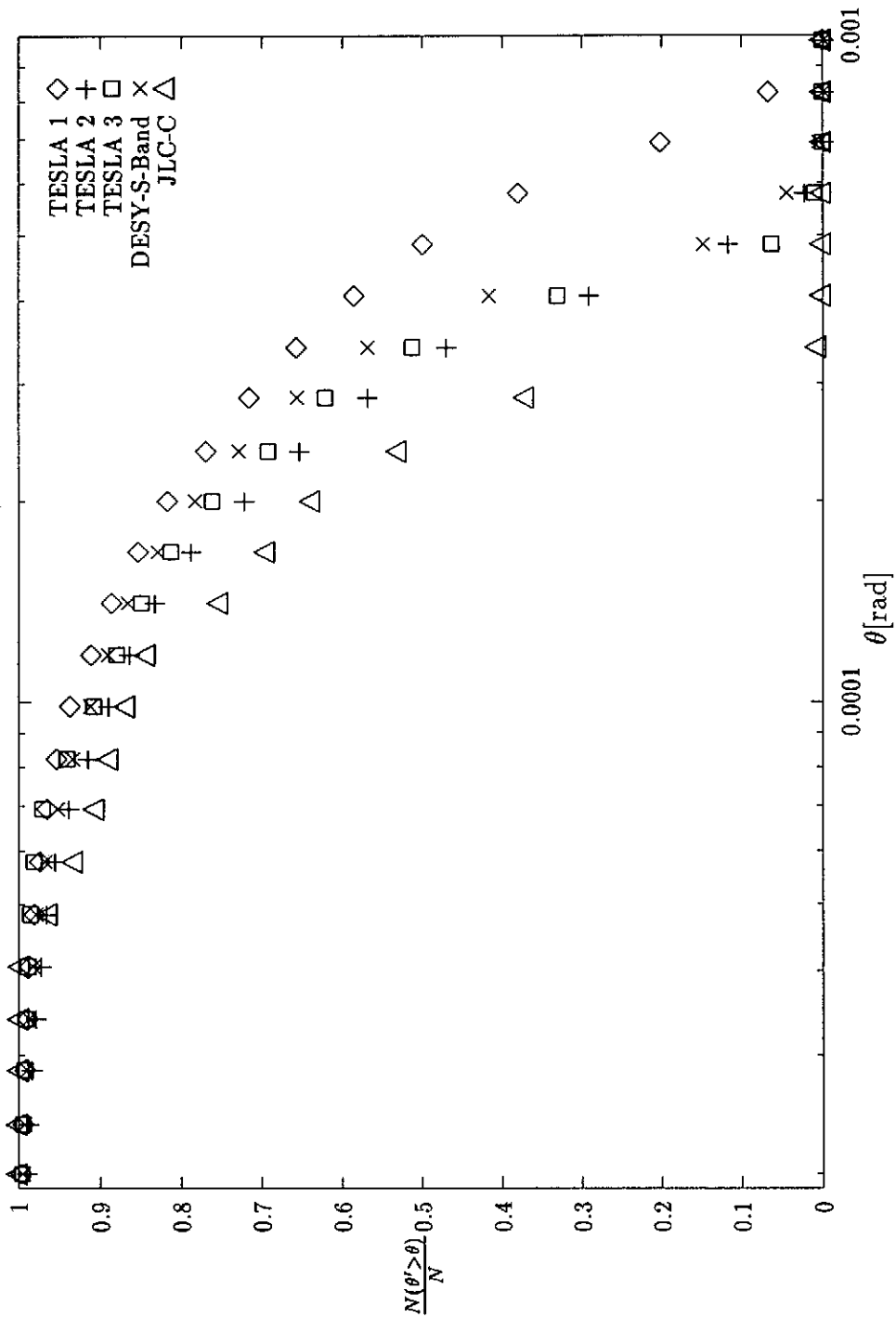


Abbildung 30: Ein Vergleich der Winkelverteilungen der Strahlteilchen nach der Wechselwirkung.

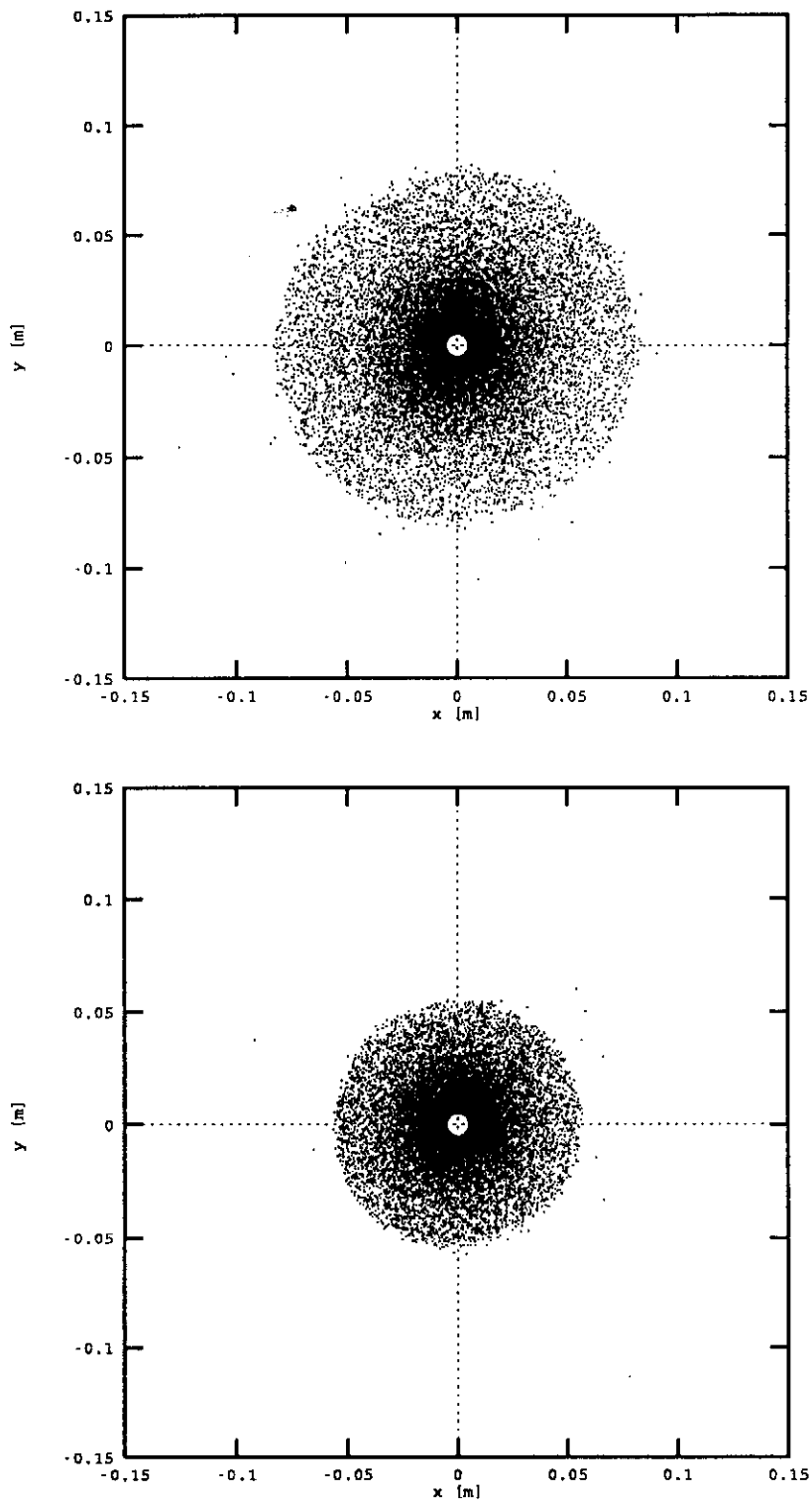


Abbildung 31: Die Verteilung der Treffer auf der Stirnseite des Detektors für TESLA 1. Oben wurde in dem Detektor ein Magnetfeld $B_z = 1\text{ T}$ angenommen, unten $B_z = 2\text{ T}$. Die leeren Kreise in den Mitten wurde nur ausgespart um die Anzahl der zu speichernden Teilchen gering zu halten. 76

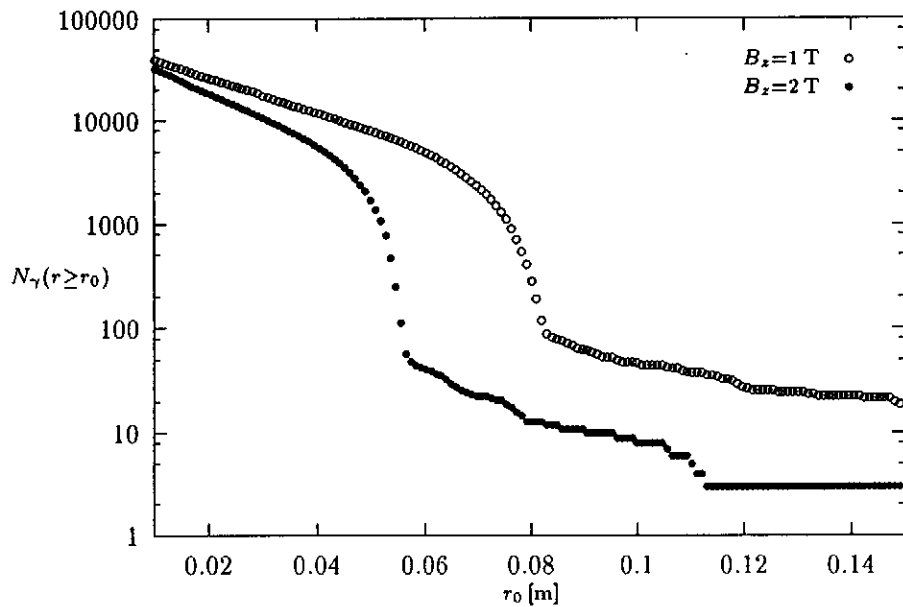


Abbildung 32: Die radiale Verteilung der erzeugten Teilchen auf der Stirnseite des Detektors für TESLA 1. Auch die Teilchen, die die Maske treffen sind berücksichtigt.

r zur Strahlachse aufgetragen sind besser geeignet, siehe Abbildung 32. Anders als bei den Streudiagrammen werden die Teilchen, die die Detektormaske treffen, hier ebenfalls bis zur Wand verfolgt.

Bei allen vorgeschlagenen Parametersätzen ist die Anzahl der durch Paarzeugung entstandenen Elektronen und Positronen, die die Detektorwand treffen, sehr groß. Es ist zwar die Aufgabe der Maske, diese Teilchen, beziehungsweise die Produkte ihrer Streuung an der Wand, von den Meßapparaturen fernzuhalten, inwieweit sie dieser Aufgabe gerecht werden kann, muß jedoch noch untersucht werden. Dazu ist eine detaillierte Bestimmung der Streuvorgänge, sowie der Bahnen der Streuprodukte notwendig. Dies erfordert naturgemäß eine entsprechend genaue Simulation der Bahnen der erzeugten Teilchen. Eine Anpassung von TRACKIT an ABEL, das die verschiedenen Kreuzungswinkel zwischen den Strahlen bei der Simulation berücksichtigen kann, wäre eine gute Ausgangsbasis für solche näheren Untersuchungen. Zusätzlich müßte genauer auf den Aufbau des Detektors eingegangen werden, um die durch den Untergrund verursachten Störungen besser beurteilen zu können.

8.7 Seitliche Abweichungen

Die beiden Teilchenpakete treffen einander in der Praxis normalerweise leicht versetzt. Schon die Bewegungen der Erde machen ein ständiges Nachjustieren des

Fokussierungs-Systems notwendig. Die Empfindlichkeit der verschiedenen Beschleuniger gegenüber dieser Bewegung ist sehr unterschiedlich. Für große Strahlausdehnungen ist sie viel geringer als für kleine. Eine genaue Untersuchung der Wirkung, die diese Abweichungen auf die Kollision der Strahlen und den Störuntergrund hat ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich. Das Programm MACPAR erlaubt keine Berücksichtigung des Kreuzungswinkels der beiden Strahlen und ist in der Genauigkeit der Simulation der Bewegung der Strahlteilchen eingeschränkt.

Allerdings wurden trotzdem für die beiden Parametersätze TESLA 1 und TESLA 2 Simulationen durchgeführt, bei denen die Mittelpunkte der Strahlen um σ_x in x -Richtung oder σ_y in y -Richtung gegeneinander versetzt sind. So ist es möglich, einen ungefähren Eindruck der Wirkung dieses Versatzes zu gewinnen.

Es zeigte sich, daß der Einfluß auf die Luminosität relativ gering war. So ergab sich für TESLA 2 statt der Luminositätserhöhung um den Faktor $H_D \approx 3.2$ nur eine Erhöhung um $H_D \approx 2.6$ für eine Abweichung um σ_y in y -Richtung und $H_D \approx 2.7$ bei einer Abweichung in x -Richtung um σ_x .

8.8 Ausblick

Die Simulationen haben gezeigt, daß der Untergrund durch inkohärente Paarzeugung für die älteren TESLA-Parameter (TESLA 1) deutlich größer ist als für die anderen Beschleuniger. Zudem ist das Luminositätsspektrum relativ breit verschmiert. Daher erscheinen die beiden neueren Vorschläge TESLA 2 und TESLA 3 günstiger. Insbesondere für TESLA 3 ergibt sich eine schmale Verteilung der Energie im Schwerpunktsystem. Der Paaruntergrund ist für TESLA 2 noch geringer als für TESLA 3. Für einen abschließenden Vergleich der beiden Vorschläge müssen die Anforderungen der Experimente berücksichtigt werden. Außerdem sollten dazu noch weitere Untergrundprozesse abgeschätzt werden. Da die Photonen einen hadronischen Anteil besitzen können sie mit geringer Wahrscheinlichkeit stark miteinander wechselwirken. Dadurch können Jets entstehen, die die Messung sehr viel empfindlicher stören, als die erzeugten Elektronen und Positronen.

Wegen der beschränkten Zeit war es nicht möglich die Einflüsse näher zu untersuchen, die die transversalen Ablagen der Strahlen von ihren Sollbahnen und der Kreuzungswinkel zwischen den Strahlen auf die Luminosität, das Luminositätsspektrum und den Untergrund haben. Die ersten Ergebnisse für eine seitliche Ablage erscheinen günstig. Für weitere Untersuchungen ist es notwendig statt MACPAR ein anderes, genauere Simulation ermöglichendes Programm zur Berechnung der Daten für TRACKIT zu benutzen.

Ein bisher wenig untersuchter Aspekt der Simulationen ist der Einfluß der verwendeten *particle-in-cells*-Methode. Ein von R. BRINKMANN entwickeltes Programm verwendet dieses Verfahren nicht [2]. Statt dessen wird die Ladungsverteilung der Bunche durch Überlagerung mehrerer Gaußverteilungen genähert. Für die Parametersätze bei denen die anderen Programme eine große Lumino-

sitätserhöhung vorhersagen ergibt sich nach diesem Programm eine weit geringere Zunahme, siehe Tabelle 2. Die Werte für den Energieverlust je Teilchen, die Anzahl und die mittlere Energie der Beamstrahlungsphotonen gleichen denen der anderen.

Literatur

- [1] V. N. Baier, V. S. Fadin, V. A. Khoze, and E. A. Kuraev. Inelastic processes in high energy quantum electrodynamics. *Physics Reports*, 78(No 3), 1981.
- [2] R. Brinkmann. Persönliches Gespräch.
- [3] P. Chen. An introduction to beamstrahlung and disruption. In *Frontiers of Particle Beams. Lecture Notes in Physics 296*. Springer Verlag, 1988.
- [4] P. Chen. Beamstrahlung and the QED, QCD backgrounds in linear colliders. *SLAC-PUB-5914*, 1992.
- [5] P. Chen and M. E. Peskin. Hadron production in $\gamma\gamma$ collisions as a background for e^+e^- colliders. *SLAC-PUB*, 5873, 1992.
- [6] P. Chen, T. Tauchi, and D. V. Schröder. Pair creation at large inherent angles. *SLAC-PUB*, 5652, 1991.
- [7] J. M. Dawson. Particle simulation of plasmas. *Review of Modern Physics*, 55(2), 1983.
- [8] F. Dydak. Elektroweak standard model: Tests at LEP. *Nuclear Physics*, A546, 1992.
- [9] S. N. Lepshokov E. A. Kushnirenko. The background in the VLEPP interaction region. Electromagnetic processes. Veröffentlichungsort unbekannt.
- [10] F. Halzen and A. D. Martin. *Quarks & Leptons*. Wiley & Sons, 1984.
- [11] K. Hänßgen and H. Perl. The $\gamma e \rightarrow \gamma e$, $\gamma e \rightarrow e(e^+e^-)$ and $\gamma e \rightarrow e(\mu^+\mu^-)$ background processes at linear electron-positron colliders (preliminary). *KMU-HEP-87-0x*, 1987.
- [12] K. Hänßgen, H. Perl, and V. Tajorski. Extension of the Monte-Carlo simulation of electron-positron beam-beam-interaction by secondary electron-gamma-interaction (preliminary). *KMU-HEP-88-0ix*, 1987.
- [13] K. Hänßgen and V. Tajorski. The computer code MACBAC for Monte Carlo simulation of electron-positron beam-beam-interaction regarding secondary e-gamma-interactions for lepton pair production (preliminary). Unveröffentlichtes Manuskript, 1988.
- [14] R. W. Hockney. The potential calculation and some applications. In *Methods of computational Physics. 9*. Academic Press, 1970.
- [15] J. D. Jackson. *Klassische Elektrodynamik*. Walter de Gruyter, 1983.

- [16] JLC-Group. JLC I. *KEK Report*, 92-16, 1992.
- [17] E. A. Kushnirenko, V. A. Tayurskii, and K. Hänßgen. Calculation of electromagnetic background processes in the interaction of VLEPP bunches. I. The code MACPAR. *Novosibirsk Inst. Nucl. Phys. Preprint*, 90-77, 1990.
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Lehrbuch der theoretischen Physik. 4. Quantenelektrodynamik*. Akademie-Verlag Berlin, 1976.
- [19] A. B. Langdon and C. K. Birdsall. *Plasma Physics via computer simulation*. McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [20] G. P. Lepage. A new algorithm for adaptive multidimensional integration. *Journal of Computational Physics*, 27(192-203), 1978.
- [21] O. Napoly. Persönliches Gespräch.
- [22] W. H. Press et al. *Numerical Recipes. The art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1990.
- [23] S. Ritter. The macroparticle code MACPAR to simulate the beam-beam interaction of high energy linear electron-positron-colliders. *KMU-HEP 85-04*, 1984.
- [24] P. Schmüser. Skript zur Vorlesung Beschleunigerphysik. Wintersemester 1990/91.
- [25] P. Schmüser. *Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker*. Springer Verlag, 1988.
- [26] David V. Schröder. *Beamstrahlung and QED Backgrounds in Future Linear Colliders*. PhD thesis, Stanford University, 1990.
- [27] I. M. Sobol. *Die Monte-Carlo-Methode*. Berlin, 1991.
- [28] T. Tauchi, editor. *Background and Masking system at IP for JLC-I and other colliders*, 1992.
- [29] T. Tauchi et al. Background problem at interaction point for an e^+e^- TeV collider. *KEK Preprint*, 90-181, 1991.
- [30] K. Yokoya. A computer simulation code for the beam-beam interaction in linear colliders. *KEK Report*, 85-9, 1985.
- [31] K. Yokoya and P. Chen. Beam-beam phenomena in linear colliders. *KEK-Preprint*, 91-2, 1991.

A Parameter für MACPAR und TRACKIT

Es existieren drei Eingabedateien für TRACKIT. Zum ersten die mit den Eingabeparametern von MACPAR. Sie wurde gegenüber [23] um den Namen der zu erzeugenden Binärdatei sowie um die Möglichkeit, die Teilchenzahl je Strahl zu bestimmen erweitert. Die zweite Datei ist die von MACPAR erzeugte Binärdatei, die ebenfalls die Simulationsparameter, sowie die Elektronen- und Photonendichten und das Photonenspektrum enthält. Die dritte schließlich enthält nur für TRACKIT bestimmte Parameter.

Die Datei RESULT.DAT enthält nach dem Ende der Rechnung in lesbarer Form die wichtigsten Parameter der Simulation. Die Werte nach der Zeile mit den Dollarzeichen sind für das Programm HIST2 bestimmt, das sie in die Histogrammdatei einfügt. Die Datei PAIRS.DAT enthält die Wechselwirkungsquerschnitte samt Fehler für jeden Zeitschritt, ebenso wie die zugehörigen Luminositäten und die Zahl der tatsächlich erzeugten Teilchen.

Die Dateien PAIRS0.DAT und PAIRS1.DAT schließlich sind unformatiert und enthalten für jedes Teilchen acht REAL-Werte in einem RECORD. Die ersten drei sind die x -, y - und z -Koordinate in Einheiten der Zelllänge. Die nächsten drei sind die entsprechenden Geschwindigkeiten in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit, der siebte Wert ist die Energie in GeV. Der achte Wert ist frei verfügbar, er kann wahlweise die Nummer des Teilchens enthalten (zum Vergleich des Anfangs- und Endzustandes eines Teilchens²⁰) oder θ_m , den maximalen Winkel, um den die Geschwindigkeit des Teilchens während der Verfolgung in einem Schritt gedreht wurde. Das Programm HIST wertet auch diese Dateien aus. Die erzeugte Histogrammdatei enthält in lesbarer Form mit Titelzeilen die wesentlichen Ergebnisse der Simulation.

A.1 Die Eingabedatei für MACPAR

Die Eingabedatei für MACPAR besteht aus fünf Zeilen. Ihr Aufbau ist wie folgt:

```
FNAME
EBEAM, SIGMAX, SIGMAY, SIGMAZ, XOFSET, YOFSET, EGAM, DEGAM, ZSIG
ELECTN, EMX, EMY
NMACRO, NX, NY, NZ, IW, IOPT, IPD, IPP, IPRI
IPRID
```

In [23] sind genauere Hinweise auf die Bedeutung der Parameter für MACPAR zu finden. Die Werte aus dieser Datei, die TRACKIT benötigt werden ebenfalls in die Binärdatei geschrieben.

Zuerst werden die Parameter die für beide Programme von Bedeutung sind besprochen, anschließend diejenigen, die nur von TRACKIT benutzt werden.

²⁰Die Reihenfolge der Teilchen ist in beiden Dateien verschieden.

- FNAME** Der Name unter dem die Binärdatei erzeugt wird.
- EBEAM** Die Strahlteilchenenergie in GeV.
- ELECTN** Die Anzahl der Elektronen je Bunch.
- EMX** Die Emittanz in x -Richtung in [cmrad].
- EMY** Die Emittanz in y -Richtung.
- SIGMAX** Die Ausdehnung des Strahles in x -Richtung in [cm]: σ_x .
- SIGMAY** Die Ausdehnung des Strahles in y -Richtung: σ_y .
- SIGMAZ** Die Ausdehnung des Strahles in z -Richtung: σ_z .
- XOFSET** Ein mögliche Ablage des Strahles von der Sollbahn in x -Richtung um $XOFSET * 0.5 * SIGMAX$ kann hiermit für den einen Strahl eingestellt werden, der andere wird um $-XOFSET * 0.5 * SIGMAX$ verschoben.
- YOFSET** Die entsprechende Ablage in y -Richtung.
- ZSIG** Die Strahlausdehnung in transversaler Richtung in σ_x beziehungsweise σ_y ausgedrückt.
- NMACRO** Die Anzahl der Makroteilchen, sie sollte nicht unter 20000 liegen.
- NX** Die Anzahl der Zellen in x -Richtung. Für TRACKIT ist ein Wert von $2^n - 2$ günstig, da dann das Gitter dort nicht erweitert werden muß. Brauchbare Ergebnisse sind ab $NX = 30$ zu erzielen. In MACPAR wird dieser Wert NLATX genannt.
- NY** Die Anzahl der Zellen in y -Richtung. Sonst gilt das Gleiche wie für NX. Anders als in ABE1 dürfen aber NY und NX unterschiedlich sein.
- NZ** Die Anzahl der Zellen in z -Richtung. Es empfiehlt sich NZ nicht viel kleiner als 50 zu wählen.

A.2 Die Parameter für TRACKIT

Die folgenden Parameter werden nur von TRACKIT benötigt. Sie werden aus der Datei TRACKIT.PAR aus der NAMELIST PARAM gelesen.

- DOEE** Diese Variable ist vom Typ LOGICAL. Ist sie .TRUE., so wird die Paarerzeugung durch den Landau-Lifschitz-Prozeß simuliert.
- DOEG** Entspricht DOEE für den Bethe-Heitler-Prozeß.

DOGG Entspricht **DOEE** für den Breit-Wheeler-Prozeß.

DOGEOM Ist ebenfalls vom Typ **LOGICAL**. Ist sie wahr, so wird beim Landau-Lifschitz- und Bethe-Heitler-Prozeß die geometrische Reduktion berücksichtigt.

DOTRCK Wird diese Variable, die ebenfalls eine boolesche ist, auf **.TRUE.** gesetzt, so werden die Teilchen nach ihrer Erzeugung durch den Strahl verfolgt.

SCAL Mit dieser Variablen wird die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Teilchen erzeugt wird beeinflusst. Sie gibt an, wievielen realen Teilchen ein simuliertes entspricht. Gewöhnlich ist ein Wert in der Größenordnung 1 ungefähr richtig, so daß keine erzeugten Teilchen nicht mehr gespeichert werden können. **SCAL** sollte am besten aus den Luminositäten, den zu erwartenden Wirkungsquerschnitten und der maximal speicherbaren Teilchenzahl **NPART** berechnet werden. Die Wirkungsquerschnitte sind auch von der Vorgabe für die Mindestenergie **YMIN** und den Mindesttransversalimpuls **YTMIN** abhängig.

YMIN Dieser Wert legt die Mindestenergie in GeV fest, die ein Teilchen besitzen muß, um bei der Paarerzeugung berücksichtigt zu werden. Er ändert auch den Wirkungsquerschnitt, um eine bessere Adaption an den interessierenden Bereich zu ermöglichen.

YTMIN Hiermit wird in GeV der Mindesttransversalimpuls bestimmt, den ein Teilchen bei der Erzeugung haben muß. Auch er geht in den Wirkungsquerschnitt ein.

NEEC1 Diese Variable vom Typ **INTEGER** legt die Anzahl der Aufrufe je Iteration der Funktion zur Bestimmung des Wirkungsquerschnitts für den Landau-Lifschitz-Prozeß während der Initialisierungsphase fest. Empfehlenswert ist **NEEC1 = 10000**. Ein zu kleiner Wert verhindert eine gute Anpassung der Gewichte in **VEGAS** an die Funktion.

NEEI1 Hiermit wird, für den obigen Prozeß, die Zahl der Iterationen durch **VEGAS** während der Initialisierungsphase vorgegeben. Ein Wert **NEEI1 = 80** ist brauchbar.

NEEC2 Dieser Wert entspricht **NEEC1**, nur wird die Zahl der Funktionsaufrufe für die Adaptionphase eines jeden Zeitschritts festgelegt. Zu dieser Zeit werden keine Paare erzeugt, sondern nur die Gewichte an die neue Ladungsverteilung, sowie an die neuen Spektren angepaßt. Auch hier empfiehlt sich **NEEC2 = 10000**.

NEEI2 Dies ist das Pendant zu **NEEI1** für die Adaptionphase. Empfehlenswert ist **NEEI2 = 10**.

NEEC3 Hiermit wird die Anzahl der Funktionsaufrufe für jeden Schritt während der Paarerzeugung für den Landau-Lifschitz-Prozeß bestimmt. Empfehlenswert ist $NEEC3 = 10000$.

NEEI3 Dies gibt die Anzahl der zugehörigen Iterationen an. Empfehlenswert ist $NEEI3 = 10$.

Die Parameter **NEGC1**, **NGGC1** und so weiter entsprechen den oben genannten, nur gelten sie für den Bethe-Heitler und Breit-Wheeler-Prozeß. Empfehlenswert sind:

$NEGC1 = 10000$	$NEGI1 = 80$	$NEGC2 = 10000$	$NEGI2 = 10$
$NEGC3 = 10000$	$NEGI3 = 10$	$NGGC1 = 5000$	$NGGC1 = 40$
$NGGC1 = 5000$	$NGGC1 = 10$	$NGGC1 = 5000$	$NGGC1 = 10$